X Mathematik. 69

Ponceletsche Polygone bei Kreisen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

vorgelegt

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Frieda Goldmann.

Donnerstag, den 29. Juli 1909, mittags 12 Uhr

im Musiksaal der Universität

Vortrag:

„Geschichte des Problems von der Quadratur des Kreises"

und

Promotion.

Breslau
Druck und Verlag H. Fleischmann
1909

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent:
Geh. Rat Professor Dr. **Sturm.**

Termin der mündlichen Prüfung: 9 Juni 1909.

Meinen lieben Eltern.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer

Herrn Geheimrat Professor Dr. Sturm

für die gütige Anregung zu der vorliegenden Arbeit und das ihr entgegengebrachte Interesse meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Inhaltsangabe.

		Seite
§§ 1—2.	A. Historische Einleitung	9—16
§§ 3—18.	B. Beziehungen zwischen zwei Kreisen in Ponceletscher Lage	16—69
	I. Spezielle Herleitung von Formeln zwischen den Radien und der Centrale zweier solcher Kreise	16—50
§§ 3—5.	Beziehungen zwischen gewissen Punkten der Centrale zweier Kreise	16—21
§ 6.	Ponceletsche Dreiecke	21—24
§ 7.	Ponceletsche Vierecke erster und zweiter Art	24—28
§ 8.	Einführung neuer Punkte der Centrale . .	28—33
§ 9.	Ponceletsche Fünfecke	33—35
§ 10.	Ponceletsche Sechsecke erster und zweiter Art	35—38
§ 11.	Einführung weiterer Punkte der Centrale .	38—44
§ 12.	Ponceletsche Siebenecke	44—48
§ 13.	Ponceletsche Achtecke erster und zweiter Art	48—50
	II. Verallgemeinerung der angewandten Methode und der erhaltenen Kennzeichen	50—69
§ 14.	Beziehungen zwischen Punkten der Centrale zweier Kreise	50—53
§ 15.	Auf Grund der „Cayleyschen Kennzeichen“ gewonnene Bedingungen für die gegenseitige Lage dieser Punkte, damit den Kreisen Ponceletsche n-Ecke ein- bezw. umgeschrieben werden können, für	53—56

Seite

a) $n = 4m$.
b) $n = 4m + 2$.
c) $n = 4m + 1$.
d) $n = 4m + 3$, wobei m irgend eine positive Zahl, in d) auch 0 sein kann.

§ 16. Untersuchung der Abhängigkeit der gewonnenen Bedingungen von einander und die sich dabei ergebende Unterscheidung von Polygonen erster und zweiter Art . . 56—62

§ 17. Einige Angaben über die gegenseitige Lage der beiden Kreise für . . . . . 62 - 68

a) $n = 4m$.
b) $n = 4m + 2$.
c) $n = 4m + 1$.
d) $n = 4m + 3$.

§ 18. Ableitung der Formel für Zehnecke erster Art mit Benutzung des Resultats von § 15 b) . 68 69

A. Historische Einleitung.

§ 1. Euler fand die Beziehung

$$R^2 - a^2 = 2rR$$

zwischen den Radien R und r und der Entfernung a der Mittelpunkte zweier Kreise, die ein und demselben Dreieck um- bezw. eingeschrieben sind. Er veröffentlichte sie im elften Bande der Novae Commentationes Petropolitanae. Eine analoge Relation leitete Nicolaus Fuss für zwei Kreise ab, denen ein Viereck ein- bezw. umgeschrieben werden kann. Die von ihm erhaltene Formel lautet $(R^2-a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2)$. (Nova Acta Petrop. Bd. X, 1792). Fuss begnügte sich nicht mit diesem Resultat. Er bemühte sich, ähnliche Formeln für Polygone von mehr als vier Seiten aufzustellen. Doch erschienen ihm die Schwierigkeiten hierbei, wie er selbst bekannte, unüberwindlich. Er beschränkte sich daher auf solche n-Ecke, die zur Centrale der beiden Kreise symmetrisch liegen, und die er „unregelmässig symmetrische Polygone" nannte. Er gewann folgende Formeln: (Nova Acta Petrop. Bd. XIII, 1802; S. 166).

$p^3q^3+p^2q^2r(p+q)-pqr^2(p+q)^2 - r^3(p+q)(p-q)^2=0$ für n=5,

$3p^4q^4-2p^2q^2r^2(p^2 + q^2) = r^4(p^2-q^2)^2$ für n=6,

$[pq - r(p-q)-2r^2]2pqr\sqrt{(p-r)(p+q)} + [p^2q^2-r^2(p^2+q^2)]$
$2r\sqrt{(q-r)(p+q)}=\pm[pq-r(p-q)][p^2q^2+r^2(p^2-q^2)]$ für n=7,

$p^2r\sqrt{q^2-r^2}+q^2r\sqrt{p^2-r^2}=pqr^2 \quad pq\sqrt{(p^2-r^2)(q^2-r^2)}$[1]) für n=8,

wobei $p = R + a$, $q = R - a$ ist und R, r und a dieselbe Bedeutung haben, wie in den früheren Formeln. Jedoch hat Fuss mehr geleistet, als er glaubte.

[1]) Der Faktor pq im letzten Gliede fehlt bei Fuss.

Poncelet bewies nämlich in seinem berühmten „Traité des propriétés projectives des figures“ (1. Aufl. 1822, 2. Aufl. 1863, Bd. 1, S. 311), dass, wenn einem Kegelschnitt ein n-Eck einbeschrieben werden kann, das zugleich einem andern Kegelschnitt umgeschrieben ist, es unendlich viele solcher Polygone gibt. (Ponceletsche Polygone). Zwei Kreise, welche einer der von Fuss gefundenen Gleichungen genügen, haben nun ein Ponceletsches n-Eck, nämlich das „unregelmässig symmetrische“. Nach dem obigen Satze besitzen sie daher unendlich viele solcher Polygone, und jene Formeln sind in der Tat von der Allgemeinheit, die Fuss erstrebte.

Darauf machte schon Jacobi in seiner Abhandlung: „Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Geometrie“ aufmerksam (Journal für Mathematik, Band 3, 1828; S. 376). Jacobi gab in dieser Arbeit jene Fussschen Relationen in rationaler Form wieder und verglich sie mit den von Steiner (Gesammelte Werke, Band I, S. 159) ohne Beweis aufgestellten Bedingungsgleichungen:

Dreieck: $R^2-a^2 = 2rR$,

Viereck: $(R^2-a^2)^2 = 2r^2(R^2+a^2)$ oder

$(R+r+a)(R+r-a)(R-r+a)(R-r-a) = r^4$,

Fünfeck: $r(R-a) = (R+a)\sqrt{R-r+a)(R-r-a)} + (R+a)\sqrt{(R-r-a)2R}$,

Sechseck: $3(R^2-a^2)^4 = 4r^2(R^2+a^2)(R^2-a^2)^2 + 16r^4a^2R^2$,

Achteck: $8r^2[(R^2-a^2)^2-r^2(R^2+a^2)]\{(R^2+a^2)\cdot[(R^2-a^2)^4 + 4r^4a^2R^2]-8r^2a^2R^2(R^2-a^2)^2\}=[(R^2-a^2)^4-4r^4a^2R^2]^2$.

Die letztere wird sich als unrichtig erweisen. Jacobi wies die Identität der Fussschen und der Steinerschen Formeln für das Fünfeck und Sechseck nach. Jedoch schienen ihm die Gleichungen für das Achteck nicht miteinander übereinzustimmen. Die Verschiedenheit dieser Formeln ist übrigens sofort einzusehen, wenn man beide nach Potenzen einer der drei in ihnen auftretenden Grössen, etwa r, ordnet. Die Koeffizienten der einzelnen Glieder erweisen sich dann als nicht proportional zu einander.

Jacobi seinerseits machte die Theorie der elliptischen Funktionen dem geometrischen Probleme dienstbar. Es gelang ihm, mit ihrer Hilfe eine transcendente Beziehung zwischen zwei Kreisen zu ermitteln, welche Ponceletsche Polygone besitzen, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass ein Kreis den andern ganz umschliesse.

Richelot gab in dem im Bande 38 des Journals für Mathematik, Seite 353, erschienenen Aufsatze: „Ueber die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen für ein bekanntes Problem der Geometrie“ für die Vielecke, deren Seitenanzahl eine Primzahl ist, mehrere Methoden an, aus den transcendenten Formeln Jacobis algebraische Bedingungsgleichungen abzuleiten, und führte sie für das Fünfeck, Siebeneck und Neuneck durch. Die so von ihm gewonnenen Formeln sind:

für das Fünfeck:

$$(R^2-a^2+2rR)^2(R^2-a^2-2rR)+8Rr^3(R^2-a^2)=0,$$

für das Siebeneck:

$$0=[(R^2-a^2)^2-4r^2R^2][(R^2-a^2)^4-16R^2a^2r^4]$$
$$-4Rr^3[(R^2-a^2)^2-4a^2r^2][(R^2-a^2)^2-2r^2(R^2+a^2)].$$

Diese Gleichung steht im 38. Bande des Journals für Mathematik, Seite 371. Setzt man jedoch in die zwei Zeilen vorher von Richelot erhaltene Gleichung

$$[1-(c+s)^2][1-(c^2-s^2)^2]-2(c+s)\cdot[1-(c-s)^2][1-c^2-s^2]=0$$

für s und c das, was sie bedeuten, also $\frac{r}{R-a}$, bezw. $\frac{r}{R+a}$ ein, (man vergleiche Seite 370, zweite Zeile) so ergibt sich die Formel

$$0=[(R^2-a^2)^2-4r^2R^2][(R^2-a^2)^4-16a^2r^4R^2]-4rR(R^2-a^2)$$
$$[(R^2-a^2)^2-4a^2r^2][(R^2-a^2)^2-2r^2(R^2+a^2)].$$

Letztere stimmt auch mit der von Forsyth gewonnenen Gleichung

$$\frac{p-r}{q-r}=\left[\frac{[pq+r(p-q)][p^2q^2+r^2(p^2-q^2)]}{[pq-r(p-q)][p^2q^2-r^2(p^2-q^2)]}\right]^2$$

überein, in der $p = R + a$ und $q = R - a$ ist. (Forsyth: Porism of the in-and circumscribed Polygon; The Messenger of Mathematics, Vol. XII. S. 104).

Für das Neuneck fand Richelot die Formel:

$$(R^2-a^2)[(R^2-a^2)^2 - 16Rar^2)^2 + 16Ra(R-a)^2r^4]\cdot$$
$$[((R^2-a^2)^2 + 16Rar^2)^2 - 16aR(R+a)^2r^4]$$
$$+ 2rR[(R^2-a^2)^2 - 4a^2r^2]^2\cdot[3(R^2-a^2)^4 - 4(R^2-a^2)^2(R^2+a^2)r^2$$
$$-16R^2a^2r^4] = 0.$$

Jacobi hatte seine Abhandlung mit der Bemerkung geschlossen, dass es für die Theorie der elliptischen Funktionen nicht ohne Interesse sein dürfte, ähnliche Betrachtungen über zwei allgemeine Kegelschnitte anzustellen, und dass er selbst noch einmal darauf zurückkommen wolle. Doch er führte seine Absicht nicht aus.

Im Jahre 1865 gaben die Herren Rosanes und Pasch eine transcendente Lösung des Problems für Kegelschnitte in dem im 64. Bande des Crelleschen Journals erschienenen Aufsatze: „Ueber das einem Kegelschnitte umbeschriebene und einem andern einbeschriebene Polygon". Die Herren Rosanes und Pasch leiteten eine Beziehung zwischen den Koeffizienten der Gleichungen zweier Kegelschnitte ab, die einem n-Eck ein- bezw. umgeschrieben sind. Sie machten sich von der Annahme frei, dass eine Kurve die andere umschliessen möge und untersuchten jeden der Einzelfälle besonders, die durch die verschiedene Lage der Kurven zu einander herbeigeführt werden. Für den Fall, dass die Kegelschnitte Kreise mit den Radien R und r der Centrale a sind, ergab sich aus den allgemeinen Formeln für das Dreieck die Beziehung:

$\frac{r}{R+a} + \frac{r}{R-a} = \pm 1$, in welcher das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem die Kreise nur imaginäre oder zwei reelle Schnittpunkte haben. Ebenso erhielten die Herren Rosanes und Pasch für das Viereck neben der bekannten [1]), mit der Fuss-Steinerschen Formel identischen Gleichung

---

[1]) Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, 2. Aufl. S. 185.

$\left(\frac{r}{R+a}\right)^2 + \left(\frac{r}{R-a}\right)^2 = 1$, die sich für Kreise mit imaginären Schnittpunkten ergab, die Bedingung

$$R = a$$

für sich reell schneidende Kreise. Es ist überraschend, dass diese einfache Beziehung so spät und erst im Anschluss an diese allgemeine Methode gefunden wurde. Man kann sie auf folgendem einfachen Wege erhalten:

Auf einem Kreise K^2 mit dem Radius R liegen die Punkte X_1, X_2, X_3 und X_4 so, dass X_1 und X_3, sowie X_2 und X_4 inbezug auf einen Durchmesser AB symmetrisch liegen, und zwar sei A auf demjenigen Bogen X_2X_4 gelegen, der keinen der beiden andern Punkte enthält. Dann ist $AX_1 \perp BX_1$ und $AX_3 \perp BX_3$. Nun werden die Winkel $X_2X_1X_4$ und $X_2X_3X_4$ von AX_1 bezw. AX_3 halbiert. Folglich sind BX_1 und BX_3 bezw. die Halbierungslinien ihrer Nebenwinkel. B ist der Schnittpunkt der Halbierungslinien aller Winkel des Vierecks $X_1X_2X_3X_4$, also der Mittelpunkt des diesem Viereck einbeschriebenen Kreises C_2. K^2 und C_2 sind ein und demselben Viereck um- bezw. eingeschrieben. Ihre Centrale a ist gleich dem Radius MB des K^2, also ist

$$R = a.$$

Das Problem der Ponceletschen Polygone ist auch mit der Weierstrassschen Theorie der elliptischen Funktionen in Verbindung gebracht worden. Halphen hat es in seinem berühmten Werke „Traité des fonctions elliptiques et de ses applications“, Teil II, Kapitel 10 behandelt. Näher darauf einzugehen würde mich hier zu weit führen. Weitere Angaben über Arbeiten auf diesem Gebiet findet man in der Schrift von Gino Loria: „I Poligoni di Poncelet“, Turin, 1889.

§ 2. In § 31 des ersten Teils der „Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“ von Sturm und auch

schon in der Liniengeometrie[1]) sind mit Hilfe der Eigenschaften einer involutorischen Korrespondenz auf einem Kegelschnitt folgende Sätze hergeleitet:

I. „*Ein Kennzeichen für Ponceletsche n-Ecke gerader Seitenzahl bei zwei Kegelschnitten K^2 und C_2 ist, dass zwischen zwei von den vier Schnitten ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n}{2}$ Tangenten des C_2 möglich ist, dessen erste und letzte in ihnen berühren*".

Ia. „*Zwischen den beiden andern Schnitten muss dann ein ebensolcher Zug laufen*".

II. „*Ein zweites Kennzeichen für Ponceletsche n-Ecke gerader Seitenzahl ist, dass zwischen zwei Berührungspunkten des K^2 mit gemeinsamen Tangenten ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n}{2} - 1$ Tangenten an C_2 geht, zu dem nicht diese gemeinsamen Tangenten gehören*".

IIa. „*Zwischen den Berührungspunkten des K^2 mit den beiden andern gemeinsamen Tangenten muss ein ebensolcher Zug laufen*".

IIb. „*Und ist von den vorhin und jetzt beschriebenen Zügen einer vorhanden, so sind vier vorhanden, zwei der einen und zwei der andern Art*".

III. „*Ein Kennzeichen für Ponceletsche n-Ecke ungerader Seitenzahl ist, dass von einem der Schnitte $K^2 C_2$ nach einem der Berührungspunkte des K^2 mit einer gemeinsamen Tangente ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n-1}{2}$ Tangenten an C_2 läuft, zu dem die Tangente des C_2 in dem Schnitt, aber nicht die gemeinsame Tangente gehört*".

IIIa. „*Ein solcher Zug zieht drei andere nach sich*".

Diese Kennzeichen rühren von Cayley her. (Philos. Transactions, Bd. 151, Teil 1 (1861), S. 225; Math. Papers, Bd. 4, S. 292).

---

[1]) „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung" von Dr. Rudolf Sturm, Tl. I. Leipzig 1892; S. 34.

Interessant ist bei Kreisen der Unterschied zwischen Polygonen erster und zweiter Art bei gerader Seitenzahl, der von Herrn Prof. Sturm zum ersten Mal hervorgehoben wird. Auf diesen Unterschied machte Herr Prof. Sturm schon in seiner Liniengeometrie, Bd. 1, S. 35 Anm., aufmerksam. Dort liest man:

„*Da die Schnittpunkte zweier Kreise in zwei wesentlich verschiedene Gruppen, die unendlich fernen und die endlichen, zerfallen, (und ebenso die dem einen Kreise angehörigen Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten), so ergeben sich, wenn n gerade ist, zwei wesentlich verschiedene Fälle, die nicht immer auseinander gehalten worden sind, — je nachdem nämlich der Zug von* $\frac{n}{2}$ *Tangenten zwei gleichartige oder zwei ungleichartige Schnittpunkte verbindet (oder derjenige von* $\frac{n}{2} - 1$ *Tangenten zwei gleichartige oder zwei ungleichartige Berührungspunkte). Steiner z. B. (Ges. Werke Bd. 1, S. 159) berücksichtigt nur den zweiten Fall*“.

Dem ersten Fall entsprechen Formeln für Polygone erster Art, dem zweiten Formeln für Vielecke zweiter Art. (Sturm, Geometrische Verwandtschaften, Bd. 1, S. 302).

Der Unterschied der beiden Arten ergab sich nicht bei Polygonen mit ungerader Seitenanzahl, für die im Kennzeichen III ein Schnittpunkt $K^2 C_2$ nicht mit einem zweiten Schnittpunkt, sondern mit einer gemeinsamen Tangente zusammengestellt ist. Doch wird man auch hier die verschiedenen Möglichkeiten der Zuordnung zu beachten haben. Ich werde dies im zweiten Teil meiner Arbeit näher ausführen.

Herr Prof. Sturm hat nun im ersten Bande der „Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“, § 31, S. 302, die von Steiner aufgestellten Bedingungsgleichungen in rationaler Form wiedergegeben und durch Hinzufügung der Formeln für Vielecke erster Art erweitert: Wir finden dort:

Dreiecke: $(R^2 - a^2)^2 - 4r^2R^2 = 0$;
Vierecke erster Art: $R = a$;

Vierecke zweiter Art: $(R^2-a^2)^2-2r^2(R^2+a^2)=0$;
Fünfecke: $(R^2-a^2)^6-12(R^2-a^2)^4R^2r^2+16(R^2-a^2)^2R^2r^4$
$(R^2+2a^2)-64R^2r^6a^4=0$;
Sechsecke erster Art: $(R^2-a^2)^2-4r^2a^2=0$;
Sechsecke zweiter Art: $3(R^2-a^2)^4-4(R^2-a^2)^2r^2(R^2+a^2)$
$-16R^2r^4a^2=0$;
Achtecke erster Art: $(R^2-a^2)^4-16R^2r^4a^2=0$;
Achtecke zweiter Art: $8r^2[(R^2-a^2)^2-r^2(R^2+a^2)]\cdot$
$\{(R^2+a^2)[(R^2-a^2)^4+4R^2r^4a^2]-8r^2a^2R^2(R^2-a^2)^2\}$
$-[(R^2-a^2)^4-4R^2r^4a^2]^2=0$.

B. Beziehungen zwischen zwei Kreisen in Ponceletscher Lage.

I. Spezielle Herleitung von Formeln zwischen den Radien und der Centrale zweier solcher Kreise.

Beziehungen zwischen gewissen Punkten der Centrale zweier Kreise.

§ 3. Ich werde in der vorliegenden Arbeit zunächst die Steinerschen Formeln ohne die Hilfe der Analysis ableiten und die dabei angewandte Methode sodann verallgemeinern.

Die in den Cayleyschen Kennzeichen erwähnten Schnittpunkte können durchweg imaginär sein. Die folgenden Betrachtungen haben den Zweck, statt der eventuell imaginären Punkte reelle Punkte einzuführen, mit denen wir arbeiten werden. Die obigen Kennzeichen sollen auf Lagenbeziehungen zwischen diesen stets reellen Punkten hinauslaufen, aus denen sich die gesuchten Bedingungsformeln für Ponceletsche Polygone ergeben werden.

Zwei Kreise K^2 und C_2 mit den Mittelpunkten bezw. M und N liegen in einer Ebene. Die auf der Centrale MN gelegenen Durchmesserendpunkte seien in K_2 A und B, in C_2 C und D. Von den vier Schnittpunkten der beiden Kreise sind zwei die absoluten Punkte J^+ und J^- in der Ebene der Kreise, die auf der unendlich fernen Geraden

g_∞ liegen. Die beiden andern endlichen Schnittpunkte liegen auf der Potenzlinie p. Diese schneide MN in Q. Der Pol P von p in bezug auf C_2 liegt auf der Centrale. Die Potenzlinie zweier Kreise teilt die Centrale so, dass die Differenz der Quadrate der Abschnitte gleich der Differenz der Quadrate der Radien ist. Dann ist, wenn $MN = a$ und a positiv ist,

$$\begin{aligned} MQ^2 - NQ^2 &= R^2 - r^2, \\ MQ + NQ &= a, \qquad \text{also} \end{aligned}$$

$$1) \qquad MQ = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a},$$

$$2) \qquad QN = \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2a}.$$

Ist N' der auf der Centrale gelegene zu N in bezug auf K^2 konjugierte Punkt, so gilt der Satz:

Zieht man in den beiden unendlich fernen Schnittpunkten der beiden Kreise an C_2 die Tangenten, also die Asymptoten, und bringt man jede mit K^2 zum zweiten Mal zum Schnitt, so ist die Verbindungslinie dieser zweiten Schnittpunkte die reelle auf der Centrale MN senkrechte Gerade, welche die Strecke NN' halbiert.

In der Tat, die Asymptoten an C_2 sind zwei durch N gehende Sekanten von K^2. Ihre vier Schnittpunkte mit K^2 sind die Ecken eines dem K^2 eingeschriebenen vollständigen Vierecks, welches jene Sekanten zu zwei Gegenseiten hat und dessen zwei andere Paare von Gegenseiten sich je auf der Polare n' von N schneiden, welche zu MN normal ist. Eine Seite des Vierecks ist g_∞. Ihre Gegenseite, die Verbindungslinie der beiden im Satz genannten zweiten Schnittpunkte, heisse s. Der Punkt sg_∞ ist der unendlich ferne Punkt N_∞ von n'. Die Polare von N_∞ in bezug auf K^2 ist der durch N gehende Durchmesser, also die Centrale MN. Der Punkt N', in dem n' die Centrale schneidet, ist die dritte Ecke des zu unserem Viereck gehörigen Diagonaldreiecks $NN_\infty N'$. Die Diagonale NN' wird in den Schnitt-

punkten mit den durch den gegenüberliegenden Diagonalpunkt gehenden Viereckseiten g_∞ und s harmonisch geteilt. Also geht s durch die Mitte S von NN'. s verbindet also die beiden reellen Punkte S und N_∞, ist also eine reelle Gerade und steht auf der Centrale senkrecht.

3) $(ABNN') = -1,$

4) $NS = SN'$; nach 3) ist
$MN \cdot MN' = R^2,$

5) $$MN' = \frac{R^2}{a},$$

6) $$NN' = NM + MN' = \frac{R^2 - a^2}{a},$$ nach 4) ist

7) $$NS = \frac{NN'}{2} = \frac{R^2 - a^2}{2a},$$

8) $$MS = \frac{R^2 - a^2}{2a} + a = \frac{R^2 + a^2}{2a}.$$

§ 4. Es sei P' der auf der Centrale gelegene zu P in bezug auf K^2 konjugierte Punkt, also

$$(ABPP') = -1.$$

Zieht man nun in den beiden endlichen Schnittpunkten der beiden Kreise die Tangenten an C_2, und fasst man ihre zweiten Schnittpunkte mit K^2 ins Auge, so ist die Verbindungslinie dieser Punkte die reelle Gerade, die auf der Centrale in dem reellen Punkte S^* senkrecht steht, für welchen

$$(PP'QS^*) = -1 \qquad \text{ist.}$$

Die Schnittpunkte der beiden genannten Tangenten an C_2 mit K^2 sind nämlich die Ecken eines dem K^2 eingeschriebenen vollständigen Vierecks, welches jene Tangenten zu zwei Gegenseiten hat, und dessen zwei andere Paare von Gegenseiten sich je auf der Polare p' von P in bezug auf K^2 schneiden. Da P auf der Centrale liegt, ist $p' \perp MN$. Eine Seite des Vierecks ist p. Ihre Gegenseite, die Ver-

bindungslinie der zweiten Schnittpunkte des K^2 mit den genannten Tangenten, heisse s^*. Der Punkt ps^* liegt auf p', ist also mit dem unendlich fernen Punkte P_∞ von p' identisch. Die s^*, welche auch durch diesen Punkt geht, steht also wie p auch auf der Centrale senkrecht. Der Schnitt der Centrale, der Polare von P_∞ in bezug auf K^2, mit p' ist die dritte Ecke des zu unserem Viereck gehörigen Diagonaldreiecks $PP_\infty P'$. Die Diagonale PP' wird in den Schnittpunkten mit den durch den gegenüberliegenden Diagonalpunkt gehenden Viereckseiten p und s^* harmonisch geteilt. p schneidet PP' in Q. s^* schneide PP' in S^*. Dann ist nach dem Vorangegangenen:

9) $(CDPQ) = -1,$

10) $(ABPP') = -1,$

11) $(PP'QS^*) = -1,$ aus 9) folgt

$NP \cdot NQ = r^2,$

12) $NP = \dfrac{2ar^2}{R^2 - r^2 - a^2},$ da

$NQ = \dfrac{R^2 - r^2 - a^2}{2a}$ 2) ist.

13) $MP = MN + NP = \dfrac{a(R^2 - a^2 + r^2)}{R^2 - a^2 - r^2}.$

Aus 10) ergibt sich

$MP \cdot MP' = R^2,$

14) $MP' = \dfrac{R^2(R^2 - a^2 - r^2)}{a(R^2 - a^2 + r^2)},$

15) $PQ = PM + MQ = \dfrac{a(a^2 - R^2 - r^2)}{R^2 - a^2 - r^2} + \dfrac{a^2 + R^2 - r^2}{2a}$

$$= \frac{a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2}{2a(R^2 - a^2 - r^2)}$$

$$= \frac{(a + R + r)(a + R - r)(a - R + r)(a - R - r)}{2a(R^2 - a^2 - r^2)},$$

$$P'Q = P'M + MQ,$$

$$MQ = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a} \qquad 1),$$

16) $$P'Q = \frac{R^4 + a^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2}{2a(a^2 - R^2 - r^2)}$$

$$= \frac{(a + R + r)(a + R - r)(a - R + r)(a - R - r)}{2a(a^2 - R^2 - r^2)},$$

$$SQ = SM + MQ$$

$$MS = \frac{a^2 + R^2}{2a} \qquad 8), \text{ also}$$

17) $$SQ = -\frac{r^2}{2a}.$$

$$(PP'QS^*) = -1 \qquad 11), \text{ daher}$$

$$\frac{2}{S^*Q} = \frac{1}{PQ} + \frac{1}{P'Q}, \text{ mithin nach 15) und 16)}$$

$$\frac{2}{S^*Q} = \frac{2a(R^2 - a^2 - r^2 - R^2 + a^2 - r^2)}{(a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2)}$$

$$= \frac{4ar^2}{2a^2R^2 + 2a^2r^2 + 2r^2R^2 - a^4 - R^4 - r^4},$$

18) $$S^*Q = \frac{2a^2R^2 + 2a^2r^2 + 2r^2R^2 - a^4 - R^4 - r^4}{2ar^2}$$

$$= \frac{(a + R + r)(a + R - r)(a - R + r)(R - a + r)}{2ar^2},$$

19) $$MS^* = MQ + QS^*$$

$$= \frac{a^4 + R^4 - 2a^2R^2 - a^2r^2 - r^2R^2}{2ar^2}.$$

§ 5. Die gemeinsamen äusseren Tangenten t_1 und t_2 der beiden Kreise schneiden sich auf MN im äusseren Aehnlichkeitspunkte $\mathfrak{A}$. Die Polare von $\mathfrak{A}$ in bezug auf K^2 ist die Verbindungslinie t der Berührungspunkte von t_1 und

t_2 mit K^2. t schneide MN in T. Dann sind $\mathfrak{A}$ und T in bezug auf K^2 konjugiert.

20) $(AB\mathfrak{A}T) = -1.$

Sind t_1^* und t_2^* die gemeinsamen inneren Tangenten von K^2 und C_2, die sich in $\mathfrak{A}^*$ auf MN schneiden, t^* die Polare von $\mathfrak{A}^*$ in bezug auf K^2, welche die Centrale in T^* trifft, so ist

21) $(AB\mathfrak{A}^*T^*) = -1.$

Auf Grund von 20) ist

$M\mathfrak{A} \cdot MT = R^2$. Es ist

22) $M\mathfrak{A} = \frac{Ra}{R-r}$, also

23) $MT = \frac{R(R-r)}{a}$.

Aus 21) folgt analog:

$M\mathfrak{A}^* \cdot MT^* = R^2$; es ist

24) $M\mathfrak{A}^* = \frac{Ra}{R+r}$,

25) $MT^* = \frac{R(R+r)}{a}$.

Ponceletsche Dreiecke.

§ 6. Das Cayleysche Kennzeichen lautet für *Dreiecke*: Man kann dem K^2 ein Dreieck einbeschreiben, das zugleich dem C_2 umgeschrieben ist, wenn zwischen einem Schnittpunkt der Kreise und dem Berührungspunkt des K^2 mit einer der gemeinsamen Tangenten $\frac{3-1}{2} = 1$ Tangente des C_2 läuft; d. h. die in einem Schnittpunkte an C_2 gelegte Tangente muss durch den Berührungspunkt von K^2 mit einer der gemeinsamen Tangenten gehen.

Die Schnittpunkte von K^2 mit den Asymptoten an C_2 liegen auf s, die mit den Tangenten in den endlichen Schnittpunkten auf s^*; die Berührungspunkte von K^2 mit den gemeinsamen äusseren Tangenten liegen auf t, die mit den inneren gemeinsamen Tangenten auf t^*.

Es muss also

$$S \equiv T \text{ oder } T^* \text{ oder}$$
$$S^* \equiv T \text{ oder } T^* \text{ sein.}$$

Aber die vier Fälle reduzieren sich auf zwei. Fällt S mit T zusammen, so auch S^* mit T^*, und wenn $S \equiv T^*$ ist, so ist gleichzeitig $S^* \equiv T$. Man beachte § 2, III a.

Ist $S \equiv T$, so ist $MS = MT$;

$$MS = \frac{R^2 + a^2}{2a} \qquad 8),$$

$$MT = \frac{R(R - r)}{a} \qquad 23),$$

$$\frac{R^2 + a^2}{2a} = \frac{R(R - r)}{a},$$

$$I.\ R^2 - a^2 = 2rR.$$

Wenn $S \equiv T^*$ ist, so ist

$MS = MT^*$, nun ist

$$MT^* = \frac{R(R + r)}{a} \qquad 25), \text{ also}$$

$$\frac{a^2 + R^2}{2a} = \frac{R(R + r)}{a},$$

$$II.\ R^2 - a^2 = -2rR.$$

Fasse ich I und II zusammen, so erhalte ich

$$\underline{(R^2 - a^2)^2 - 4r^2R^2 = 0}$$

als Bedingung dafür, dass K^2 und C_2 Ponceletsche Dreiecke besitzen.

Ich will nun noch bestätigen, dass sich wirklich dieselbe Formel ergibt, wenn wir einmal

$$S^* \equiv T^* \text{ und dann}$$
$$S^* \equiv T \text{ voraussetzen.}$$

Fällt S^* mit T^* zusammen, so ist nach 19) und 25)

$$\frac{R^4 + a^4 - 2a^2R^2 - a^2r^2 - r^2R^2}{2ar^2} = \frac{R(R+r)}{a},$$

$$R^4 + a^4 - 2a^2R^2 - a^2r^2 - 3r^2R^2 - 2r^3R = 0.$$

Eine Zerlegung in Faktoren führt zu

$$(R^2 - a^2 - 2rR)(R - a + r)(R + a + r) = 0.$$

Setze ich den zweiten oder den dritten Faktor gleich 0, so bedeutet das jedesmal eine Berührung der beiden Kreise, und dieser Fall ist bei unserem Problem auszuschliessen. Der erste Faktor jedoch führt in der Tat zu der obigen Dreiecksformel

I. $R^2 - a^2 = 2rR.$

Aus $S^* \equiv T$ ergibt sich nach 19) und 23)

$$\frac{R^4 + a^4 - 2a^2R^2 - a^2r^2 - r^2R^2}{2ar^2} = \frac{R(R-r)}{a},$$

$$R^4 + a^4 - 2a^2R^2 - a^2r^2 - 3r^2R^2 + 2r^3R = 0,$$
$$(R^2 - a^2 + 2rR)(R - a - r)(R + a - r) = 0.$$

Wieder sind die beiden letzten Faktoren als von 0 verschieden anzusehen. Daher ist $R^2 - a^2 = -2rR$. Dies ist die oben erhaltene Formel II.

Forsyth erhielt in seiner bereits erwähnten Arbeit (The Messenger of Mathematics, Vol. XII, S. 101) für Dreiecke neben der Formel $r = \frac{R^2 - a^2}{2R}$, die mit I identisch ist, die Gleichung $r = \frac{R^2 - a^2}{2a}$. Letztere ist aber eine Formel für Sechsecke erster Art — (man vergleiche Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Band 1, S. 303, sowie § 10 dieser Arbeit) — und kann nicht gleichzeitig die Bedingung für Poncelet'sche Dreiecke sein. Es sind

auch nicht alle von Forsyth gemachten Schlüsse umkehrbar. Aus $3t = 2K$ geht bei Forsyth $snt = sn2t$ hervor. Diese Gleichung ist aber nicht nur richtig, wenn $3t = 2K$ ist, sondern auch, wenn $3t = 2K + 2iK'$ ist, da $snt = -sn(t - 2K - 2iK') = sn(2K + 2iK' - t)$ ist. K' ist das vollständige Integral, das für den in bezug auf K komplementären Modul gebildet ist. Dass $t = \frac{2}{3}(K + iK')$ wirklich eine Bedingung für das Vorhandensein von Sechsecken erster Art ist, ergibt sich aus dem in der Einleitung genannten Aufsatze von den Herren Rosanes und Pasch (Journal für Mathematik, Bd. 64). Dort findet man, S. 164, für sich schneidende Kreise als Bedingungsgleichungen für Ponceletsche n-Ecke:

$$\operatorname{cn}\left(\frac{4m}{n}(L + iL_1), \lambda\right) = \frac{r}{R + d} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{4m}{n}(L + iL_1), \lambda\right) = \frac{R - d}{R + d}, \quad \text{worin}$$

$$\frac{r}{R + d} = \operatorname{cn} u \text{ und } \frac{R - d}{R + d} = \operatorname{dn} u \text{ ist.}$$

Setzt man in diesen Formeln $m = 1$ und $n = 6$, so ergibt sich, dass $u = \frac{2}{3}(L + iL_1)$ sein muss. u, λ, L und L_1 haben dieselbe Bedeutung wie t, $\varkappa$, K und K' bei Forsyth. m ist bei sich schneidenden Kreisen die Anzahl der Polygonecken zwischen einem Schnittpunkt K^2C_2 und dem Berührungspunkt mit einer gemeinsamen Tangente. Die Herren Rosanes und Pasch haben für Sechsecke eine algebraische Bedingungsgleichung nur für den Fall sich nicht schneidender Kreise aufgestellt. Diese ist mit der Teilformel II für Sechsecke erster Art identisch. (§ 10).

Ponceletsche Vierecke erster und zweiter Art.

§ 7. Für Vierecke heisst das erste Cayleysche Kennzeichen: Man kann dem K^2 ein Viereck einbeschreiben,

das zugleich dem C_2 umgeschrieben ist, wenn zwischen zwei der vier Schnittpunkte ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n}{2} = 2$ Tangenten an C_2 möglich ist.

Nimmt man zunächst die beiden endlichen Schnittpunkte, so müssen die von ihnen an C_2 gelegten Tangenten sich also auf K^2 schneiden; d. h. es muss

$$P \equiv A \text{ oder } B \text{ sein.}$$

Die in einem endlichen Schnittpunkte der beiden Kreise auf der Tangente von C_2 errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt N von C_2. Andrerseits schneidet sie die Centrale in B oder A, je nachdem P in A oder B fällt; denn ein Peripheriewinkel von 90^0 steht über einem Durchmesser. Es muss also, wenn P auf K^2 liegt, $N \equiv A$ oder B sein. Geht man von den beiden absoluten Punkten aus, so müssen sich die Asymptoten von C_2 auf K^2 schneiden. Das führt zu demselben Resultat, das wir eben erhielten, N fällt auf K^2. Zwei Kreise besitzen also Ponceletsche Vierecke erster Art, wenn

$$\underline{R = a} \qquad \text{ist.}$$

Dieselbe Formel ergibt sich, wenn man, vom zweiten Cayleyschen Kennzeichen ausgehend, voraussetzt, dass t den C_2 berührt, also

$$T \equiv C \text{ oder } D \text{ ist.}$$

In der Tat, ist $T \equiv C$, also $MT = MC$, so ist nach 23)

$$\frac{R(R - r)}{a} = a - r,$$

$$R^2 - a^2 - r(R - a) = 0,$$

$$\text{I.} \quad (R - a)(R + a - r) = 0.$$

$T \equiv D$ ergibt

$$\frac{R(R - r)}{a} = a + r,$$

$$R^2 - rR - a^2 - ar = 0,$$

II. $(R + a)(R - a - r) = 0.$

Die Vereinigung von I und II führt, da eine Berührung der Kreise auszuschliessen ist, zu

$$R^2 - a^2 = 0, \quad \text{d. h.}$$

N fällt auf K^2.

Nimmt man zwei ungleichartige Schnittpunkte, so besteht der in dem Kennzeichen I (§ 2) erwähnte Zug von $\frac{n}{2}$ Tangenten aus einer endlichen Tangente und einer Asymptote an C_2. Diese müssen sich auf K^2 schneiden. s^* und s gehen beide durch diesen Schnittpunkt und stehen beide auf MN senkrecht, also wird $s^* \equiv s$, daher auch $S^* \equiv S$.

$$(PP'QS^*) = -1 \qquad 11);$$

wenn $S \equiv S^*$ ist, so wird

$$(PP'QS) = -1, \text{ also}$$

$$\frac{2}{SQ} = \frac{1}{PQ} + \frac{1}{P'Q}. \quad \text{Nun ist}$$

$$PQ = \frac{R^4 + a^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2}{2a(R^2 - a^2 - r^2)} \qquad 15),$$

$$P'Q = \frac{R^4 + a^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2}{2a(a^2 - R^2 - r^2)} \qquad 16),$$

$$SQ = -\frac{r^2}{2a} \qquad 17), \text{ mithin}$$

$$-\frac{4a}{r^2} = \frac{2a(a^2 + r^2 - R^2 - a^2 + R^2 + r^2)}{2a^2R^2 + 2r^2R^2 + 2a^2r^2 - a^4 - r^4 - R^4}$$

$$= \frac{4ar^2}{2a^2R^2 + 2r^2R^2 + 2a^2r^2 - a^4 - r^4 - R^4},$$

$$r^4 = a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2.$$

$$\underline{(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2).}$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass K^2 und C_2 Poncelet'sche Vierecke zweiter Art besitzen.

Dieselbe Bedingungsgleichung hätten wir erhalten, wenn wir vom zweiten Cayleyschen Kennzeichen ausgegangen wären und die dort genannten gemeinsamen Tangenten als ungleichartig angenommen hätten. Da die allgemeinen Erörterungen in einem späteren Teile meiner Arbeit uns davon überzeugen werden, so werde ich mich mit der einen Ableitung der Formel begnügen.

Bevor wir zu den weiteren Polygonen übergehen, möchte ich an dieser Stelle eine Konstruktion von Kreisen, die Ponceletsche Dreiecke, und solcher, die Ponceletsche Vierecke besitzen, einschalten, welche ich einer gütigen Mitteilung von Herrn Geheimrat Professor Dr. Sturm verdanke.

1.

Man zeichne einen Kreis K^2 und eine ihn in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ schneidende Sehne. In $\mathfrak{T}$ lege man an K^2 die Tangente. Konstruiert man nun einen der beiden Kreise C_2, welche diese Gerade auch zur Tangente haben und ausserdem $\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$ berühren, so besitzen K^2 und C_2 Ponceletsche Dreiecke. In der Tat, die im Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ der Kreise an C_2 gelegte Tangente geht durch den Berührungspunkt von K^2 mit einer gemeinsamen Tangente, und dies ist ja das Kennzeichen für das Vorhandensein Ponceletscher Dreiecke. Bemerkenswert ist, dass die Tangente an C_2 im zweiten Schnittpunkt durch den Berührungspunkt von K^2 mit der zweiten äusseren gemeinsamen Tangente geht.

2.

Man zeichne einen Kreis K^2 und lege auf ihn zwei Punkte $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, deren Verbindungslinie t heisse. Dann lege man in $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ an K^2 die Tangenten t_1 und t_2. Die vier Berührungskreise des Dreiseits tt_1t_2 haben zu K^2 Ponceletsche Lage, und zwar führen der Inkreis J und der zu t gehörige Ankreis $\mathfrak{A}_3$ zu Ponceletschen Vierecken erster Art, die beiden andern Ankreise $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zu Vierecken zweiter Art. K^2 und J, sowie K^2 und $\mathfrak{A}_3$ erfüllen nämlich die Bedingung, dass die Verbindungslinie t der

Berührungspunkte von K^2 mit den gemeinsamen äusseren Tangenten t_1 und t_2 den J, bezw. $\mathfrak{A}_3$ berührt. Stellt man K^2 mit $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}_2$ zusammen, so zeigt sich, dass t_1 und t_2 ungleichartige gemeinsame Tangenten sind und dass die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte mit K^2 den $\mathfrak{A}_1$, bezw. $\mathfrak{A}_2$ berührt. Dass die Mittelpunkte von J und $\mathfrak{A}_3$ auf K^2 liegen, lässt sich leicht beweisen.

Einführung neuer Punkte der Centrale.

§ 8. Ziehe ich von den Berührungspunkten $T_1 \equiv (K^2, t_1)$ und $T_2 \equiv (K^2, t_2)$ bezw. an C_2 die zweiten Tangenten t_3 und t_4, so sind die Verbindungslinien der Berührungspunkte von t_1 und t_3 mit C_2 und von t_2 und t_4 mit C_2 die Polaren bezw. der Punkte T_1 und T_2 in bezug auf C_2. Ihr Schnittpunkt R ist also der Pol von t in bezug auf C_2. Da $t \perp MN$ ist, liegt R auf MN. Es ist

$$26) \qquad (CDTR) = -1.$$

t_1, t_2, t_3 und t_4 berühren C_2 bezw. in $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$. R ist ein Diagonalpunkt des Sehnenvierecks $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4$ von C_2. Wenn in einem einem Kreise eingeschriebenen Viereck eine Seite auf einem Durchmesser, der einen Diagonalpunkt enthält, durch den sie selbst nicht geht, senkrecht steht, so steht auch ihre Gegenseite auf diesem Durchmesser senkrecht. Da $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ als Polare von $\mathfrak{A}$ in bezug auf C_2 senkrecht auf MN steht, so steht nach dem oben genannten Satze $\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4$ senkrecht auf MN. Der Pol von $\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4$ in bezug auf C_2, der Punkt $t_3t_4 \equiv Z$ liegt also auf MN. Wenn die Ecken eines Sehnenvierecks in einem Kegelschnitt die Berührungspunkte eines Tangentenvierecks sind, so haben beide Figuren dieselben Diagonalpunkte. Nun sind $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ die Berührungspunkte bezw. von t_1, t_2, t_3 und t_4 mit C_2. Also ist $R \equiv (\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_4)$ ein Diogonalpunkt des Vierseits $t_1t_2t_3t_4$. In ihm schneiden sich die Diagonalen $\mathfrak{A}Z$ und $r \equiv (t_1t_4, t_2t_3)$. Die dritte Diagonale ist t. Zwei Diagonalen eines vollständigen Vierseits werden durch die

Ecken auf der dritten Diagonale harmonisch getrennt. Demnach ist

27) $$(TR\mathfrak{A}Z) = -1.$$

Die Verbindungslinie der zweiten Schnittpunkte U_3 und U_4 von K^2 bezw. mit t_3 und t_4 heisse w, ihr Schnittpunkt mit der Centrale W. $T_1 T_2 U_3 U_4$ ist ein dem K^2 eingeschriebenes Viereck. $t \perp MN$. Der Diagonalpunkt Z liegt auf MN. Nach dem obigen Satze ist daher $w \perp MN$. $T_1 U_4$ und $T_2 U_3$ schneiden sich auf MN in dem Diagonalpunkt Z' des Vierecks $T_1 T_2 U_3 U_4$. Aus Eigenschaften des vollständigen Vierecks folgt

28) $$(TWZZ') = -1 \quad \text{und,}$$

da das Viereck dem K^2 eingeschrieben ist,

29) $$(ABZZ') = -1.$$

Die von $T_1^* \equiv (K^2, t_1^*)$ und $T_2^* \equiv (K^2, t_2^*)$ an C_2 gelegten zweiten Tangenten mögen K^2 zum zweiten Male in U_3^*, bezw. U_4^* schneiden. Ist R^* der Pol von t^* in bezug auf C_2, sind Z^* und $Z^{*\prime}$ die endlichen Diagonalpunkte des Vierecks $T_1^* T_2^* U_3^* U_4^*$, und schneidet $U_3^* U_4^*$ die Centrale in W^*, so lassen sich in ganz analoger Weise folgende Beziehungen ableiten:

26*) $$(CDT^*R^*) = -1,$$

27*) $$(T^*R^*\mathfrak{A}^*Z^*) = -1,$$

28*) $$(T^*W^*Z^*Z^{*\prime}) = -1,$$

29*) $$(ABZ^*Z^{*\prime}) = -1.$$

Es ist

$$MT = \frac{R(R-r)}{a} \qquad 23),$$

30) $$NT = -a + MT = \frac{R^2 - a^2 - rR}{a}; \quad \text{aus}$$

$(CDTR) = -1$ 26) folgt

$NR \cdot NT = r^2$, also

31) $NR = \frac{ar^2}{R^2-a^2-rR'}$,

$M\mathfrak{A} = \frac{Ra}{R-r}$ 22)

32) $T\mathfrak{A} = TM + M\mathfrak{A} = \frac{-R(R-r)}{a} + \frac{aR}{R-r}$

$= \frac{R(a+R-r)(a-R+r)}{a(R-r)}$,

33) $R\mathfrak{A} = RN + NM + M\mathfrak{A}$

$= \frac{-ar^2}{R^2-a^2-rR} - a + \frac{aR}{R-r}$

$= \frac{a(-2r^2R + R^2r + r^3 - a^2r)}{(R-r)(R^2-a^2-rR)}$,

$(TR\mathfrak{A}Z) = -1$ 27), daher ist

$\frac{2}{Z\mathfrak{A}} = \frac{1}{T\mathfrak{A}} + \frac{1}{R\mathfrak{A}}$

$= \frac{a(R-r)}{R(a+R-r)(a-R+r)} + \frac{(R-r)(R^2-a^2-rR)}{ar(R-r+a)(R-r-a)}$

$= \frac{R-r}{(a+R-r)(a-R+r)}\left(\frac{a}{R} - \frac{R^2-a^2-rR}{ar}\right)$

$= \frac{(R-r)(a^2r + a^2R - R^3 + R^2r)}{arR(a+R-r)(a-R+r)}$,

34) $Z\mathfrak{A} = \frac{2arR(a+R-r)(a-R+r)}{(R-r)(a^2r + a^2R - R^3 + R^2r)}$,

35) $MZ = M\mathfrak{A} + \mathfrak{A}Z$

$= \frac{Ra}{R-r} - \frac{2arR(a+R-r)(a-R+r)}{(R-r)(a^2r + a^2R - R^3 + R^2r)}$

$= \frac{aR(-a^2r + a^2R - R^3 + 3R^2r + 2r^3 - 4r^2R)}{(R-r)(a^2r + a^2R - R^3 + R^2r)}$

$$= \frac{aR(a^2 - R^2 + 2rR - 2r^2)}{a^2r + a^2R - R^3 + R^2r};$$

aus $(ABZZ') = -1$ 29) folgt

$MZ \cdot MZ' = R^2$,

36) $$MZ' = \frac{R(a^2r + a^2R - R^3 + R^2r)}{a(a^2 - R^2 + 2rR - 2r^2)}.$$

$$MT = \frac{R(R-r)}{a} \quad 23),$$

37) $$ZT = ZM + MT$$

$$= \frac{aR(R^2 - a^2 - 2rR + 2r^2)}{a^2r + a^2R - R^3 + R^2r} + \frac{R(R-r)}{a}$$

$$= \frac{R(-a^4 + 2a^2R^2 - 2a^2rR + a^2r^2 - R^4 + 2R^3r - R^2r^2)}{a(a^2r + a^2R - R^3 + R^2r)}$$

$$= \frac{R(R^2 - a^2)(a + R - r)(a - R + r)}{a(a^2r + a^2R - R^3 + R^2r)}.$$

38) $$Z'T = Z'M + MT$$

$$= \frac{R(R^3 - a^2r - a^2R - R^2r)}{a(a^2 - R^2 + 2rR - 2r^2)} + \frac{R(R-r)}{a}$$

$$= \frac{R(2rR^2 - 2a^2r - 4r^2R + 2r^3)}{a(a^2 - R^2 + 2rR - 2r^2)}$$

$$= \frac{2rR(R + a - r)(R - a - r)}{a(a^2 - R^2 + 2rR - 2r^2)}.$$

Da $(ZZ'TW) = -1$ 28) ist, so ist

$$\frac{2}{WT} = \frac{1}{ZT} + \frac{1}{Z'T}$$

$$= \frac{a(a^2r + a^2R - R^3 + R^2r)}{R(R^2 - a^2)(a + R - r)(a - R + r)} + \frac{a(a^2 - R^2 + 2rR - 2r^2)}{2rR(R + a - r)(R - a - r)}$$

$$= \frac{a(2a^2r^2 + 2a^2rR - 2rR^3 + 2r^2R^2) - (R^2 - a^2)(a^2 - R^2 + 2rR - 2r^2)}{2rR(R^2 - a^2)(a + R - r)(a - R + r)}$$

$$= \frac{a(4a^2rR - 4rR^3 + 4r^2R^2 - 2a^2R^2 + R^4 + a^4)}{2rR(R^2 - a^2)(a + R - r)(a - R + r)}$$

$$= \frac{a(R^2 - a^2 - 2rR)^2}{2rR(R^2 - a^2)(a + R - r)(a - R + r)},$$

39) $$WT = \frac{4rR(R^2 - a^2)(a + R - r)(a - R + r)}{a(R^2 - a^2 - 2rR)^2},$$

$$ST = SM + MT$$

$$= -\frac{a^2 + R^2}{2a} + \frac{R(R - r)}{a} \qquad 8), \quad 23),$$

40) $$ST = \frac{R^2 - a^2 - 2rR}{2a}.$$

$$QT = QM + MT, \text{ also nach 1) und 23)}$$

$$= \frac{r^2 - a^2 - R^2}{2a} + \frac{R(R - r)}{a},$$

41) $$QT = \frac{R^2 + r^2 - 2rR - a^2}{2a}$$

$$= \frac{(R - r + a)(R - r - a)}{2a};$$

$$S^*T = S^*Q + QT,$$

$$S^*Q = \frac{(a + R + r)(a + R - r)(a - R + r)(R - a + r)}{2ar^2} \qquad 18),$$

42) $$S^*T = \frac{(R + a - r)(R - a - r)}{2a} \left\{ \frac{(a + R + r)(a - R - r)}{r^2} + 1 \right\}$$

$$= \frac{(R + a - r)(R - a - r)(a^2 - R^2 - 2rR)}{2ar^2}.$$

Rechnungen, analog denen, welche die Gleichungen 30) bis 42) ergaben, führen zu folgenden Ergebnissen:

30*) $$NT^* = \frac{R^2 - a^2 + rR}{a},$$

31*) $NR^* = \frac{ar^2}{R^2-a^2+rR}$,

32*) $T^*\mathfrak{A}^* = \frac{R(a+R+r)(a-R-r)}{a(R+r)}$,

33*) $R^*\mathfrak{A}^* = \frac{ar(a+R+r)(a-R-r)}{(R^2-a^2+Rr)(R+r)}$,

34*) $Z^*\mathfrak{A}^* = \frac{2arR(a+R+r)(a-R-r)}{(R+r)(a^2r-a^2R+R^3+R^2r)}$,

35*) $MZ^* = \frac{aR(R^2-a^2+2rR+2r^2)}{a^2r-a^2R+R^3+R^2r}$,

36*) $MZ^{*\prime} = \frac{R(a^2r-a^2R+R^3+R^2r)}{a(R^2-a^2+2rR+2r^2)}$,

37*) $Z^*T^* = \frac{R(R^2-a^2)(R+r+a)(R+r-a)}{a(a^2r-a^2R+R^3+R^2r)}$,

38*) $Z^{*\prime}T^* = \frac{2rR(R+r+a)(R+r-a)}{a(R^2-a^2+2rR+2r^2)}$,

39*) $W^*T^* = \frac{4rR(R^2-a^2)(a+R+r)(R+r-a)}{a(R^2-a^2+2rR)^2}$,

40*) $ST^* = \frac{R^2-a^2+2rR}{2a}$,

41*) $QT^* = \frac{(R+r+a)(R+r-a)}{2a}$,

42*) $S^*T^* = \frac{(R+r+a)(R+r-a)(a^2-R^2+2rR)}{2ar^2}$.

Ponceletsche Fünfecke.

§ 9. Das Cayleysche Kennzeichen lautet für Fünfecke: Man kann dem K^2 ein Fünfeck einbeschreiben, das zugleich dem C_2 umgeschrieben ist, wenn zwischen einem Schnittpunkt der Kreise und dem Berührungspunkt des K^2

mit einer der gemeinsamen Tangenten $\frac{5-1}{2} = 2$ Tangenten an C_2 gezogen werden können; d. h. die aus einem solchen Berührungspunkte an C_2 gelegten zweiten Tangenten schneiden K^2 in denselben Punkten wie die in den Schnittpunkten an C_2 gelegten Tangenten. Also ist

$$\begin{aligned} s &\equiv w \text{ oder } w^* \text{ oder} \\ s^* &\equiv w \text{ oder } w^*, \text{ mithin} \\ S &\equiv W \text{ oder } W^* \text{ oder} \\ S^* &\equiv W \text{ oder } W^*. \end{aligned}$$

Ist nun $S \equiv W$, also

$WT = ST$, so ist nach 39) und 40)

$$\frac{4rR(R^2-a^2)(a+R-r)(a-R+r)}{a(R^2-a^2-2rR)^2} = \frac{R^2-a^2-2rR}{2a},$$

$$-8rR(R^2-a^2)^2-8r^3R(R^2-a^2)+16r^2R^2(R^2-a^2)=(R^2-a^2-2rR)^3,$$

$$\underline{\text{I. } (R^2-a^2)^3+2rR(R^2-a^2)^2-4r^2R^2(R^2-a^2)-8a^2r^3R=0.}$$

Diese Gleichung ist mit der von Richelot abgeleiteten Formel für Fünfecke (§ 1) identisch.

Ist $S^* \equiv W$, so ist

$WT = S^*T$, also nach 39) und 42)

$$\frac{4rR(R^2-a^2)(a+R-r)(a-R+r)}{a(R^2-a^2-2rR)^2} = \frac{(R+a-r)(R-a-r)(a^2-R^2-2rR)}{2ar^2};$$

ich dividiere beide Seiten durch $(a+R-r)(a-R+r)$, indem ich wiederum den Fall sich berührender Kreise ausschliesse, und erhalte nach Beseitigung der Nenner:

$$8r^3R(R^2-a^2)-(R^2-a^2-2rR)^2(R^2-a^2+2rR)=0,$$

$$8r^3R(R^2-a^2)-(R^2-a^2)^3+4r^2R^2(R^2-a^2)+2rR(R^2-a^2)^2-8r^3R^3=0,$$

$$\underline{\text{II. } (R^2-a^2)^3-2rR(R^2-a^2)^2-4r^2R^2(R^2-a^2)+8a^2r^3R=0.}$$

Ich kombiniere nun I und II durch Multiplikation der linken Seiten und ordne gleichzeitig nach Potenzen von r:

$$\underline{(R^2-a^2)^6-12r^2R^2(R^2-a^2)^4+16r^4R^2(R^2-a^2)^2\cdot(R^2+2a^2)-64a^4r^6R^2=0,}$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass K^2 und C_2 Ponceletsche Fünfecke besitzen.

Die Annahme, dass $S \equiv W^*$ oder $S^* \equiv W^*$ ist, führt analog zu derselben Gleichung für Fünfecke.

Ponceletsche Sechsecke erster und zweiter Art.

§ 10. Das zweite Cayleysche Kennzeichen heisst für Sechsecke:

Damit dem K^2 ein Sechseck einbeschrieben werden kann, das zugleich dem C_2 umgeschrieben ist, muss zwischen zwei Berührungspunkten von K^2 mit gemeinsamen Tangenten ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{6}{2} - 1 = 2$ Tangenten gehen, zu denen die gemeinsamen Tangenten nicht gehören.

Nimmt man zunächst die Berührungspunkte zweier gleichartiger gemeinsamer Tangenten, etwa der äusseren, so müssen also die von T_1 und T_2 an C_2 gelegten zweiten Tangenten sich auf K^2 schneiden, d. h. es muss

$$Z \equiv A \text{ oder } B \text{ sein.}$$

Ist $Z \equiv A$, so ist

$$ZT = AT,$$

$$ZT = \frac{R(R^2-a^2)(a+R-r)(a-R+r)}{a(a^2r+a^2R-R^3+R^2r)} \qquad 37),$$

$$43)\quad AT = AM + MT = R + \frac{R(R-r)}{a} \qquad 23)$$

$$= \frac{R(a+R-r)}{a}. \quad \text{Also ist}$$

$$\frac{R(a+R-r)}{a} - \frac{R(R^2-a^2)(a+R-r)(a-R+r)}{a(a^2r+a^2R-R^3+R^2r)} = 0.$$

Da $\frac{R(a+R-r)}{a} \neq 0$ sein muss, ist

$$(R^2-a^2)(a-R+r) = a^2r + a^2R - R^3 + R^2r,$$

$$aR^2 - a^3 = 2a^2r,$$

I. $R^2 - a^2 = 2ar.$

Aus $Z \equiv B$ ergibt sich

$$BT - ZT = 0. \quad \text{Da}$$

44) $$BT = -R + \frac{R(R-r)}{a} = \frac{R(R-a-r)}{a} \text{ ist,}$$

so folgt auf Grund von 37):

$$\frac{R(R-a-r)}{a}\left\{1 + \frac{(R^2-a^2)(a+R-r)}{a^2r + a^2R - R^3 + R^2r}\right\} = 0.$$

Nun muss $\frac{R(R-a-r)}{a} \neq 0$ sein. Also ist

$$a^2r + a^2R - R^3 + R^2r + (R^2 - a^2)(a + R - r) = 0.$$

II. $R^2 - a^2 = -2ar.$

Aus I und II folgt

$$(R^2 - a^2)^2 = 4a^2r^2$$

als Bedingung für das Vorhandensein Ponceletscher Sechsecke erster Art.

Wir gelangten zu ihr unter der Voraussetzung, dass die Berührungspunkte des K^2 mit den beiden gemeinsamen äusseren Tangenten durch einen Zug von zwei Tangenten an C_2 verbunden seien. Nach dem in § 2, IIa zitierten Satze muss dann zwischen den Berührungspunkten des K^2 mit den beiden andern gemeinsamen Tangenten ein ebensolcher Zug laufen, d. h. die Annahme, dass $Z^* \equiv B$ oder A ist, muss zu derselben Formel führen. Die Teilformel I ist die von Forsyth irrtümlich für das Dreieck gefundene Beziehung. Die Gleichung II erhielten die Herren Rosanes und Pasch.

Fassen wir nun die Berührungspunkte des K^2 mit zwei ungleichartigen gemeinsamen Tangenten ins Auge. Die von ihnen an C_2 gelegten zweiten Tangenten müssen sich dann

auf K^2 schneiden, d. h. einer der beiden Punkte (K^2, w) muss mit einem der Punkte (K^2, w^*) zusammenfallen, und hieraus ergibt sich

$$W \equiv W^*,$$
$$WN = W^*N.$$

45) $WN = WT + TN$ 39), 30)

$$= \frac{4rR(R^2-a^2)(a+R-r)(a-R+r)}{a(R^2-a^2-2rR)^2} - \frac{R^2-a^2-rR}{a}$$

$$= \frac{4rR(R^2-a^2)(a+R-r)(a-R+r)-(R^2-a^2-rR)(R^2-a^2-2rR)^2}{a(R^2-a^2-2rR)^2}$$

$$= \frac{4a^2r^3R + rR(R^2-a^2)^2 - (R^2-a^2)^3}{a(R^2-a^2-2rR)^2},$$

46) $W^*N = W^*T^* - NT^*$ 39*), 30*)

$$= \frac{4rR(R^2-a^2)(a+R+r)(R+r-a)}{a(R^2-a^2+2rR)^2} - \frac{R^2-a^2+rR}{a}$$

$$= \frac{4rR(R^2-a^2)(a+R+r)(R+r-a)-(R^2-a^2+rR)(R^2-a^2+2rR)^2}{a(R^2-a^2+2rR)^2}$$

$$= -\frac{4a^2r^3R + rR(R^2-a^2)^2 + (R^2-a^2)^3}{a(R^2-a^2+2rR)^2}.$$

Nun soll $WN = W^*N$ sein.

$$\frac{4a^2r^3R + rR(R^2-a^2)^2 - (R^2-a^2)^3}{(R^2-a^2-2rR)^2} = -\frac{4a^2r^3R+rR(R^2-a^2)^2+(R^2-a^2)^3}{(R^2-a^2+2rR)^2},$$

$$rR(R^2-a^2)^4+4a^2r^3R(R^2-a^2)^2+4r^3R^3(R^2-a^2)^2+16a^2r^5R^3-4rR(R^2-a^2)^4=0,$$

Nach einer Division durch $-rR$ erhält man:

$$\underline{3(R^2-a^2)^4 - 4r^2(R^2-a^2)^2(R^2+a^2) - 16a^2r^4R^2 = 0}$$

als Bedingung dafür, dass K^2 und C_2 Poncelctsche Sechsecke zweiter Art besitzen.

Dass das erste Cayleysche Kennzeichen für Polygone gerader Seitenzahl zu denselben Formeln führt wie das

zweite, möge nur noch für Sechsecke erster Art durch Rechnung nachgewiesen werden. Der allgemeine Nachweis ist im Teil B II enthalten. Man vergleiche auch § 2, IIb. Dem ersten Cayleyschen Kennzeichen zufolge müssen, damit K^2 und C_2 Ponceletsche Sechsecke erster Art besitzen, zwischen zwei gleichartigen Schnittpunkten der beiden Kreise drei Tangenten gezogen werden können. Da ein Zug von drei an C_2 gelegten Tangenten zwischen den absoluten Punkten einen ebensolchen zwischen den endlichen Schnittpunkten nach sich zieht, so genügt es, den ersteren zu betrachten. Es muss also s den C_2 berühren, und da $s \perp MN$ ist, so ist der Berührungspunkt der Schnittpunkt S mit MN.

Dann ist

$$S \equiv C \text{ oder } D.$$

Ist $S \equiv D$, so ist

$$MS = MD,$$

$$\frac{a^2 + R^2}{2a} = a + r,$$

$$\text{I.} \quad (R^2 - a^2) = 2ar.$$

Aus $S \equiv C$ folgt

$$MS = MC,$$

$$\frac{a^2 + R^2}{2a} = a - r,$$

II. $R^2 - a^2 = -2ar$. Aus I und II folgt $R^2 - a^2 = 4a^2r^2$, also in der Tat die erwartete Formel.

Einführung weiterer Punkte der Centrale.

§ 11. S' sei der Schnittpunkt der Polaren der beiden Punkte (K^2, s), also der Pol von s in bezug auf C_2.

47) $$(S'\,S\,C\,D) = -1.$$

S' ist ein Diagonalpunkt des dem C_2 eingeschriebenen Sehnenvierecks, dessen Ecken die Berührungspunkte der von den zwei Punkten (K^2, s) an C_2 gelegten vier Tangenten

sind. Also ist S' auch ein Diagonalpunkt des von diesen vier Tangenten gebildeten Tangentenvierecks. Zwei dieser Tangenten, die Asymptoten, schneiden sich in N. Der Schnittpunkt der andern sei P_2. Die Diagonale NP_2 geht durch S'. P_2 liegt also auf der Centrale. Der zweite auf NP_2 gelegene Diagonalpunkt des Tangentenvierecks ist S. Nach einem Satz vom vollständigen Vierseit ist

48) $$(N P_2 S' S) = -1.$$

Die von den Punkten (K^2, s) an C_2 gelegten zweiten Tangenten schneiden K^2 zum zweiten Male in Punkten, deren Verbindungslinie s_2 heissen möge. MN werde von s_2 in S_2 geschnitten. s und s_2 sind zwei Gegenseiten eines dem K^2 eingeschriebenen vollständigen Vierecks, dessen einer Diagonalpunkt P_2 ist. Der zweite auf MN liegende Diagonalpunkt sei P_2'. Dann ist nach Sätzen vom vollständigen Viereck:

49) $$(A B P_2 P_2') = -1 \quad \text{und}$$

50) $$(S S_2 P_2 P_2') = -1.$$

Ersetzt man in den bisherigen Betrachtungen des § 11 die Bezeichnungen

S′, s, S, N, P_2, s_2, S_2, P_2', S_2 bezw. durch
S*′, s*, S*, P, P_2*, s_2*, S_2*, P_2*′, S_2*, so erhält man analog

47*) $$(S^{*\prime} S^* C D) = -1,$$

48*) $$(S^{*\prime} S^* P P_2^*) = -1,$$

49*) $$(A B P_2^* P_2^{*\prime}) = -1,$$

50*) $$(S^* S_2^* P_2^* P_2^{*\prime}) = -1.$$

Es ist

$$NS \cdot NS' = r^2 \qquad 47),$$

51) $$NS' = \frac{2 a r^2}{R^2 - a^2} \qquad \text{nach 7),}$$

$$\frac{2}{NP_2} = \frac{1}{NS} + \frac{1}{NS'} \qquad 48),$$

$$\frac{2}{NP_2} = \frac{2a}{R^2-a^2} + \frac{R^2-a^2}{2ar^2}$$

$$= \frac{4a^2r^2 + R^4 + a^4 - 2a^2R^2}{2ar^2(R^2 - a^2)},$$

52) $$NP_2 = \frac{4ar^2(R^2 - a^2)}{4a^2r^2 + R^4 + a^4 - 2a^2R^2},$$

$$NP = \frac{2ar^2}{R^2 - a^2 - r^2} \qquad 12),$$

53) $$P_2P = P_2N + NP = \frac{4ar^2(a^2 - R^2)}{4a^2r^2 + (R^2 - a^2)^2} + \frac{2ar^2}{R^2 - a^2 - r^2}$$

$$= \frac{2ar^2(2a^2R^2 + 2a^2r^2 + 2r^2R^2 - a^4 - R^4)}{(R^2 - a^2 - r^2)(4a^2r^2 + R^4 + a^4 - 2a^2R^2)},$$

54) $$MP_2 = MN + NP_2 = a + \frac{4ar^2(R^2 - a^2)}{4a^2r^2 + R^4 + a^4 - 2a^2R^2}$$

$$= \frac{a(R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4r^2R^2)}{4a^2r^2 + R^4 + a^4 - 2a^2R^2},$$

55) $$MP_2' = \frac{R^2}{MP_2} \qquad 49)$$

$$= \frac{R^2(R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4a^2r^2)}{a(R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4r^2R^2)},$$

56) $$SP_2 = SM + MP_2$$

$$= -\frac{a^2 + R^2}{2a} + \frac{a(R^4+a^4-2a^2R^2+4r^2R^2)}{R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4a^2r^2} \quad 8),\ 54)$$

$$= \frac{(a^2 - R^2)(a^4 + R^4 - 2a^2R^2 - 4a^2r^2)}{2a(R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4a_2r^2},$$

$$SP_2' = SM + MP_2'$$

$$= -\frac{R^2 + a^2}{2a} + \frac{R^2(R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4a^2r^2)}{a(R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4r^2R^2)}$$

$$= \frac{-(R^2-a^2)^2(R^2+a^2)-4r^2R^2(R^2+a^2)+2R^2(R^2-a^2)^2+8a^2r^2R^2}{2a(R^4+a^4-2a^2R^2+4r^2R^2)},$$

57) $SP_2' = \frac{(R^2-a^2)(R^4+a^4-2a^2R^2-4r^2R^2)}{2a(R^4+a^4-2a^2R^2+4r^2R^2)}$; es ist

$$\frac{2}{SS_2} = \frac{1}{SP_2} + \frac{1}{SP_2'} \qquad 50)$$

$$= \frac{2a}{(a^2-R^2)}\left\{\frac{R^4+a^4-2a^2R^2+4a^2r^2}{R^4+a^4-2a^2R^2-4a^2r^2} - \frac{R^4+a^4-2a^2R^2+4r^2R^2}{R^4+a^4-2a^2R^2-4r^2R^2}\right\}$$

$$= \frac{2a}{a^2-R^2} \cdot$$

$$\left\{\frac{(R^2-a^2)^4-4r^2(R^2-a^2)^3-16a^2r^4R^2-(R^2-a^2)^4-4r^2(R^2-a^2)^3+16a^2r^4R^2}{(R^4+a^4-2a^2R^2-4a^2r^2)\cdot(R^2+a^2-2a^2R^2-4r^2R^2)}\right\}$$

$$= \frac{16ar^2(R^2-a^2)^2}{(R^4+a^4-2a^2R^2-4a^2r^2)\cdot(R^4+a^4-2a^2R^2-4r^2R^2)},$$

58) $SS_2 = \frac{(R^4+a^4-2a^2R^2-4a^2r^2)(R^4+a^4-2a^2R^2-4r^2R^2)}{8ar^2(R^2-a^2)^2}$.

$$NS^* = NQ + QS^*$$

$$= \frac{R^2-a^2-r^2}{2a} + \frac{R^4+a^4+r^4-2a^2R^2-2r^2R^2-2a^2r^2}{2ar^2} \qquad 2),\ 18)$$

$$= \frac{r^2R^2-a^2r^2-r^4+a^4+R^4+r^4-2a^2R^2-2a^2r^2-2r^2R^2}{2ar^2},$$

59) $NS^* = \frac{a^4+R^4-2a^2R^2-3a^2r^2-r^2R^2}{2ar^2}$,

$NS^* \cdot NS^{*\prime} = r^2 \qquad 47^*)$,

60) $NS^{*\prime} = \frac{2ar^4}{a^4+R^4-2a^2R^2-3a^2r^2-r^2R^2}$,

61) $S^{*\prime}P = S^{*\prime}N + NP$

$$= \frac{2ar^4}{3a^2r^2+r^2R^2-a^4-R^4+2a^2R^2} + \frac{2ar^2}{R^2-a^2-r^2} \qquad 12)$$

$$= \frac{2ar^2(a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2)}{(R^2 - a^2 - r^2)(a^4 + R^4 - 2a^2R^2 - r^2R^2 - 3a^2r^2)},$$

$$S^*P = S^*N + NP$$

$$= \frac{3a^2r^2 + r^2R^2 - a^4 - R^4 + 2a^2R^2}{2ar^2} + \frac{2ar^2}{R^2 - a^2 - r^2}$$

$$= \frac{a^6 - 2a^4r^2 + 3a^2R^4 - 3a^4R^2 - R^6 + 2r^2R^4 + a^2r^4 - r^4R^2}{2ar^2(R^2 - a^2 - r^2)}$$

$$= \frac{(a^2 - R^2)(a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2),}{2ar^2(R^2 - a^2 - r^2)}$$

62) $$S^*P = \frac{(a^2 - R^2)(a - R + r)(a - R - r)(a + R + r)(a + R - r)}{2ar^2(R^2 - a^2 - r^2)},$$

$$\frac{2}{P_2{}^*P} = \frac{1}{S^*P} + \frac{1}{S^{*\prime}P} \qquad 48^*)$$

$$= \frac{(R^2 - a^2 - r^2)[4a^2r^4 + (R^2 - a^2)(3a^2r^2 + r^2R^2 - a^4 - R^4 + 2a^2R^2)]}{2ar^2(a^2 - R^2)(a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2)}$$

$$= \frac{(R^2 - a^2 - r^2)(4a^2r^4 - 3a^4r^2 + 2a^2r^2R^2 + r^2R^4 + a^6 - 3a^4R^2 + 3a^2R^4 - R^6)}{2ar^2(a^2 - R^2)(a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2)},$$

63) $$P_2{}^*P = \frac{4ar^2(a^2 - R^2)(a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2)}{(R^2 - a^2 - r^2)(4a^2r^4 - 3a^4r^2 + 2a^2r^2R^2 + r^2R^4 + a^6 - 3a^4R^2 + 3a^2R^4 - R^6)},$$

$$P_2{}^*N = P_2{}^*P - NP;$$

$$NP = \frac{2ar^2}{R^2 - a^2 - r^2} \qquad 12),$$

64) $$P_2{}^*N = \frac{2ar^2}{(R^2 - a^2 - r^2)}\left\{\frac{2(a^2 - R^2)(a^4 + R^4 + r^4 - 2a^2R^2 - 2a^2r^2 - 2r^2R^2)}{4a^2r^4 - 3a^4r^2 + 2a^2r^2R^2 + r^2R^4 + a^6 - 3a^4R^2 + 3a^2R^4 - R^6} - 1\right\}$$

$$= \frac{2ar^2(a^6 - 3a^4R^2 + 3a^2R^4 - R^6 - 2a^2r^4 - a^4r^2 - 2r^4R^2 + 3r^2R^4 - 2a^2r^2R^2)}{(R^2 - a^2 - r^2)(4a^2r^4 - 3a^4r^2 + 2a^2r^2R^2 + r^2R^4 + a^6 - 3a^4R^2 + 3a^2R^4 - R^6)}$$

$$= \frac{2ar^2(2a^2R^2 + 2r^2R^2 + 2a^2r^2 - a^4 - R^4)}{4a^2r^4 - 3a^4r^2 + 2a^2r^2R^2 + r^2R^4 + a^6 - 3a^4R^2 + 3a^2R^4 - R^6},$$

65) $P_2{}^*M = P_2{}^*N - a$

$$= \frac{a(2a^2r^2R^2+4r^4R^2+a^4r^2-3r^2R^4-a^6+3a^4R^2-3a^2R^4+R^6)}{4a^2r^4-3a^4r^2+2a^2r^2R^2+r^2R^4+a^6-3a^4R^2+3a^2R^4-R^6},$$

66) $P_2{}^{*\prime}M = \dfrac{R^2}{P_2{}^*M}$ 49*)

$$= \frac{R^2(4a^2r^4-3a^4r^2+2a^2r^2R^2+r^2R^4+a^6-3a^4R^2+3a^2R^4-R^6)}{a(R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6-3r^2R^4+a^4r^2+4r^4R^2+2a^2r^2R^2)},$$

67) $P_2{}^*S^* = P_2{}^*P - S^*P$ 63), 62)

$$= \frac{(a^2-R^2)(a^4+R^4+r^4-2a^2r^2-2a^2r^2-2r^2R^2)}{(R^2-a^2-r^2)}$$

$$\cdot \left\{ \frac{4ar^2}{4a^2r^4-3a^4r^2+2a^2r^2R^2+r^2R^4+a^6-3a^4R^2+3a^2R^4-R^6} - \frac{1}{2ar^2} \right\}$$

$$= \frac{(a^2-R^2)(a^4+R^4+r^4-2a^2R^2-2a^2r^2-2r^2R^2)}{(R^2-a^2-r^2)}$$

$$\cdot \frac{4a^2r^4+3a^4r^2-2a^2r^2R^2-r^2R^4+R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6}{2ar^2(4a^2r^4-3a^4r^2+2a^2r^2R^2+r^2R^4+a^6-3a^4R^2+3a^2R^4-R^6)}$$

$$= \frac{(a^2-R^2)(a^4+R^4+r^4-2a^2R^2-2a^2r^2-2r^2R^2)(R^4+a^4-2a^2R^2-4a^2r^2)}{2ar^2(4a^2r^4-3a^4r^2+2a^2r^2R^2+r^2R^4+a^6-3a^4R^2+3a^2R^4-R^6)},$$

68) $P_2{}^{*\prime}S^* = P_2{}^{*\prime}M + MS^*$ 66), 19)

$$= \frac{\begin{cases} 2r^2R^2[4a^2r^4+2a^2r^2(R^2-a^2)+r^2(R^4-a^4)-(R^2-a^2)^3]+[(R^2-a^2)^2 \\ -r^2(R^2-a^2)-2a^2r^2][(R^2-a^2)^3-r^2(R^4-a^4)-2r^2R^2(R^2-a^2)+4r^4R^2] \end{cases}}{2ar^2(R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6-3r^2R^4+a^4r^2+4r^4R^2+2a^2r^2R^2)}$$

$$= \frac{\begin{cases} 8a^2r^6R^2+2r^4R^2(R^4-a^4)+4a^2r^4R^2(R^2-a^2)-2r^2R^2(R^2-a^2)^3+(R^2-a^2)^5 \\ -r^2(R^2-a^2)^4-2a^2r^2(R^2-a^2)^3-r^2(R^2-a^2)^3(R^2+a^2)+r^4(R^2-a^2)(R^4-a^4) \\ +2a^2r^4(R^4-a^4)-2r^2R^2(R^2-a^2)^3+2r^4R^2(R^2-a^2)^2+4a^2r^4R^2(R^2-a^2) \\ +4r^4R^2(R^2-a^2)^2-4r^6R^2(R^2-a^2)-8a^2r^6R^2 \end{cases}}{2ar^2(R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6-3r^2R^4+a^4r^2+4r^4R^2+2a^2r^2R^2)}$$

$$= \frac{\begin{cases} (R^2-a^2)^5-4r^6R^2(R^2-a^2)+r^4(R^2-a^2)(9R^4+6a^2R^2+a^4) \\ -2r^2(R^2-a^2)^3(3R^2+a^2) \end{cases}}{2ar^2(R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6-3r^2R^4+a^4r^2+4r^4R^2+2a^2r^2R^2)},$$

$$= \frac{\begin{array}{l}(R^2-a^2)(R^8-4a^2R^6+6a^4R^4-4a^6R^2+a^8-4r^6R^2+9r^4R^4+6a^2r^4R^2+a^4r^4\\ -6r^2R^6-6a^4r^2R^2+12a^2r^2R^4-2a^2r^2R^4-2a^6r^2+4a^4r^2R^2)\end{array}}{2ar^2(R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6-3r^2R^4+a^4r^2+4r^4R^2+2a^2r^2R^2)},$$

68) $P_2^{*\prime}S^*$

$$= \frac{(R^2-a^2)(a^4+R^4+r^4-2a^2R^2-2a^2r^2-2r^2R^2)(R^4+a^4-2a^2R^2-4r^2R^2)}{2ar^2(R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6-3r^2R^4+a^4r^2+4r^4R^2+2a^2r^2R^2)}.$$

$$\frac{2}{S_2^*S^*} = \frac{1}{P_2^*S^*} + \frac{1}{P_2^{*\prime}S^*} \qquad 50^*).$$

Setzt man:

$$u = \frac{(4a^2r^4-3a^4r^2+2a^2r^2R^2+r^2R^4+a^6-3a^4R^2+3a^2R^4-R^6).}{(a^4+R^4-2a^2R^2-4r^2R^2),}$$

$$v = \frac{(R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6-3r^2R^4+a^4r^2+4r^4R^2+2a^2r^2R^2).}{(a^4+R^4-2a^2R^2-4a^2r^2),}$$

so ist

$$\frac{2}{S_2^*S^*} = \frac{2ar^2(u-v)}{(a^2-R^2)(R^4+a^4-2a^2R^2-4a^2r^2)(R^4+a^4-2a^2R^2-4r^2R^2)} \cdot \frac{1}{R^4+a^4+r^4-2a^2R^2-2a^2r^2-2r^2R^2}.$$

Multipliziert man u und v aus, und bildet man $u-v$, so wird bei geeigneter Zusammenfassung

$$u-v = 2(a^2-R^2)(R^4+a^4-2a^2R^2-2a^2r^2-2r^2R^2)^2, \quad \text{also}$$

$$69)\ S_2^*S^* = \frac{\begin{array}{l}(a^4+R^4-2a^2R^2-4a^2r^2)(a^4+R^4-2a^2R^2-4r^2R^2)\\ \cdot(a^4+R^4+r^4-2a^2R^2-2a^2r^2-2r^2R^2)\end{array}}{2ar^2(R^4+a^4-2a^2R^2-2a^2r^2-2r^2R^2)^2},$$

Ponceletsche Siebenecke.

§ 12. Das Cayleysche Kennzeichen für Siebenecke ist:

Man kann dem K^2 ein Siebeneck einbeschreiben, das zugleich dem C_2 umgeschrieben ist, wenn von einem Schnitt-

punkte der beiden Kreise nach einem der Berührungspunkte des K^2 mit einer gemeinsamen Tangente ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{7-1}{2} = 3$ Tangenten an C_2 läuft, zu dem die gemeinsame Tangente nicht gehört. Es muss also einer der Punkte (K^2, s_2) und (K^2, s_2^*) mit einem der Punkte (K^2, w) und (K^2, w^*) zusammenfallen; d. h. es muss

$$\begin{aligned} S_2 &\equiv W \text{ oder } W^* \text{ oder} \\ S_2^* &\equiv W^* \text{ oder } W \text{ sein.} \end{aligned}$$

Wieder genügt es, die Fälle

$$S_2 \equiv W \text{ und } S_2 \equiv W^* \text{ zu}$$

behandeln, da sie das Zusammenfallen von S_2^* mit W^*, bezw. W mit sich führen.

Es sei zunächst

$$S_2 \equiv W, \qquad \text{also} \qquad S_2 T = WT.$$

70) $S_2 T = S_2 S + ST$ 58), 40)

$$= \frac{-[(R^2-a^2)^2-4a^2r^2][(R^2-a^2)^2-4r^2R^2]}{8ar^2(R^2-a^2)^2} + \frac{R^2-a^2-2rR}{2a}$$

$$= \{-(R^2-a^2)^4 + 4a^2r^2(R^2-a^2)^2 + 4r^2R^2(R^2-a^2)^2 - 16a^2r^4R^2 + 4r^2(R^2-a^2)^3 - 8r^3R(R^2-a^2)^2\} : (R^2-a^2)^2 \cdot 8ar^2$$

$$= \frac{-(R^2-a^2)^4 + 8r^2R^2(R^2-a^2)^2 - 8r^3R(R^2-a^2)^2 - 16a^2r^4R^2}{8ar^2(R^2-a^2)^2},$$

$$WT = \frac{4rR(R^2-a^2)(a^2-R^2+2rR-r^2)}{a(R^2-a^2-2rR)^2} \qquad 39).$$

Aus $S_2 T = WT$ folgt nach Beseitigung der Nenner:

$$\begin{aligned} &-(R^2-a^2)^6 + 8R^2r^2(R^2-a^2)^4 - 8r^3R(R^2-a^2)^4 - 16a^2r^4R^2(R^2-a^2)^2 \\ &- 4r^2R^2(R^2-a^2)^4 + 32r^4R^4(R^2-a^2)^2 - 32r^5R^3(R^2-a^2)^2 - 64a^2r^6R^4 \\ &+ 4rR(R^2-a^2)^5 - 32r^3R^3(R^2-a^2)^3 + 32r^4R^2(R^2-a^2)^3 \\ &+ 64a^2r^5R^3(R^2-a^2) = -32r^3R(R^2-a^2)^4 + 64r^4R^2(R^2-a^2)^3 \\ &- 32r^5R(R^2-a^2)^3. \end{aligned}$$

Ordnet man nach Potenzen von r, so erhält man als erste Siebenecksformel:

$$\text{I.}\quad (R^2-a^2)^6-4rR(R^2-a^2)^5-4r^2R^2(R^2-a^2)^4$$
$$+8r^3R(R^2-a^2)^3(R^2+3a^2)-16a^2r^4R^2(R^2-a^2)^2$$
$$-32a^2r^5R(R^2-a^2)(R^2+a^2)+64a^2r^6R^4=0.$$

Es sei nun $S_2 \equiv W^*$, woraus

$$S_2T = W^*T \text{ folgt.}$$

$$TT^* = TN + NT^*$$

$$= \frac{a^2-R^2+rR}{a} + \frac{R^2-a^2+rR}{a} \qquad 30),\ 30^*),$$

$$71)\quad TT^* = \frac{2rR}{a};$$

$$W^*T^* = \frac{4rR(R^2-a^2)(a+R+r)(R-a+r)}{a(R^2-a^2+2rR)^2} \qquad 39^*)$$

$$72)\quad W^*T = W^*T^* + T^*T \cdot$$

$$= \frac{2rR}{a}\left\{\frac{2(R^2-a^2)(R^2-a^2+r^2+2rR)-(R^2-a^2+2rR)^2}{(R^2-a^2+2rR)^2}\right\}$$

$$= \frac{2rR[(R^2-a^2)^2+2r^2(R^2-a^2)-4r^2R^2]}{a(R^2-a^2+2rR)^2};$$

$$S_2T = \frac{-(R^2-a^2)^4+8r^2R^2(R^2-a^2)^2-8r^3R(R^2-a^2)^2-16a^2r^4R^2}{8ar^2(R^2-a^2)^2} \qquad 70).$$

Setzt man nun $S_2T = W^*T$, so ergibt sich nach Beseitigung der Nenner:

$$-(R^2-a^2)^6+8r^2R^2(R^2-a^2)^4-8r^3R(R^2-a^2)^4-16a^2r^4R^2(R^2-a^2)^2$$
$$-4rR(R^2-a^2)^5+32r^3R^3(R^2-a^2)^3-32r^4R^2(R^2-a^2)^3$$
$$-64a^2r^5R^3(R^2-a^2)-4r^2R^2(R^2-a^2)^4+32r^4R^4(R^2-a^2)^2$$
$$-32r^5R^3(R^2-a^2)^2-64a^2r^6R^4=16r^3R(R^2-a^2)^4+32r^5R(R^2-a^2)^3$$
$$-64r^5R^3(R^2-a^2)^2.$$

Nach Potenzen von r geordnet, heisst die zweite Gleichung für Siebenecke:

$$\text{II.}\quad (R^2-a^2)^6+4rR(R^2-a^2)^5-4r^2R^2(R^2-a^2)^4$$
$$-8r^3R(R^2-a^2)^3(R^2+3a^2)-16a^2r^4R^2(R^2-a^2)^2$$
$$+32a^2r^5R(R^2-a^2)(R^2+a^2)+64a^2r^6R^4=0.$$

Die Formel I stimmt mit der von Forsyth gefundenen Gleichung für das Siebeneck (The Messenger of Mathematics, Vol. XII, S. 107) überein. Auch ist sie, abgesehen von dem in der Einleitung berichtigten Druckfehler mit der von Richelot gewonnenen Bedingungsgleichung identisch. Fuss gelangt beim Siebeneck zu einer Formel, die, rational gemacht, 24ster Dimension ist. Die Kombination der von mir erhaltenen Gleichungen I und II ergibt auch eine Formel 24ster Dimension. Jedoch kann diese mit der Fussschen Relation nicht identisch sein, da sie in r zwölften Grades ist, während die rational gemachte Formel von Fuss Glieder mit r^{14} enthält. Da die Ableitung der Fussschen Formel, abgesehen von zwei Druckfehlern[1]) richtig ist, so muss diese eine der beiden Gleichungen I und II in sich enthalten. Setzt man, um dies für einen speziellen Fall zu untersuchen, $a = 0$, so wird

$$\text{I:}\quad R^3-4rR^2-4r^2R+8r^3=0,$$
$$\text{II:}\quad R^3+4rR^2-4r^2R-8r^3=0,\quad \text{und}$$

die Gleichung von Fuss lautet für $a = 0$:

$$4rR^2(R^2-2r^2)\sqrt{2R(R-r)}=\pm R^6.$$

Durch Quadrieren derselben erhält man nach einer Division durch R^5:

$$(F)\equiv R^7-32r^2R^5+32r^3R^4+128r^4R^3-128r^5R^2-128r^6R$$
$$+128r^7=0.$$

---

[1]) Lies: Nora Acta Petrop. Bd. XIII, S. 183, Zeile 6: p + r statt p — r und Zeile 7: q — r statt p — r.

Die linke Seite von (F) ist durch I, nicht durch II, teilbar.

Um das Auftreten des überflüssigen Faktors der Fussschen Gleichung zu erklären, müsste man vielleicht untersuchen, ob die von Fuss gemachten Schlüsse sämtlich umkehrbar sind. Forsyth hat scheinbar auch auf den Vergleich mit der Fussschen Formel verzichtet.

Poncelet'sche Achtecke erster und zweiter Art.

§ 13. Das erste Cayleysche Kennzeichen lautet für Achtecke: Man kann dem K^2 ein Achteck einbeschreiben, das zugleich dem C_2 umgeschrieben ist, wenn zwischen zwei Schnittpunkten $(K^2 C_2)\ \frac{n}{2} = 4$ Tangenten an C_2 gezogen werden können. Nimmt man zunächst zwei gleichartige Schnittpunkte, etwa die absoluten Punkte, so müssen die von den Punkten (K^2, s) an C_2 gelegten zweiten Tangenten sich auf K^2 schneiden, d. h. es muss

$$P_2 \equiv A \text{ oder } B \text{ sein.}$$

Ist $P_2 \equiv A$, so ist

$$MA = MP_2 \qquad 54),$$

$$-R = \frac{a(R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4r^2R^2)}{R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4a^2r^2},$$

$$-R(R^2-a^2)^2 - 4a^2r^2R = a(R^2-a^2)^2 + 4ar^2R^2,$$

$$\underline{\text{I. } [(R^2-a^2)^2 + 4ar^2R]\ [a + R] = 0.}$$

Fällt P_2 mit B zusammen, so wird $MP_2 = MB$.

$$\frac{a(R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4r^2R^2)}{R^4 + a^4 - 2a^2R^2 + 4a^2r^2} = R,$$

$$a(R^2-a^2)^2 + 4ar^2R^2 = R(R^2-a^2)^2 + 4a^2r^2R,$$

$$\underline{\text{II. } [(R^2-a^2)^2 - 4ar^2R]\ [R-a] = 0.}$$

$R + a = 0$ und $R - a = 0$ bedeuten das Vorhandensein Ponceletscher Vierecke erster Art, die, zweimal durchlaufen, als Achtecke aufgefasst werden können. Sehen wir von diesen uneigentlichen Achtecken ab, so geben I und II zusammen

$$(R^2 - a^2)^4 - 16\,a^2 r^4 R^2 = 0$$

als die Bedingung für Ponceletsche Achtecke erster Art.

Um die Formel für Achtecke zweiter Art abzuleiten, setzen wir voraus, dass zwischen zwei ungleichartigen Schnittpunkten der beiden Kreise ein Zug von vier Tangenten an C_2 laufe, dass also einer der Punkte (K^2, s_2) mit einem der Punkte (K^2, s_2^*) zusammenfalle. Dann muss

$$S_2 \equiv S_2^* \text{ sein.}$$

$$SS^* = SN + NS^* \qquad 7),\ 59)$$

$$= \frac{a^2 - R^2}{2a} + \frac{(R^2 - a^2)^2 - 3a^2r^2 - r^2R^2}{2ar^2},$$

$$73)\quad SS^* = \frac{(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(a^2 + R^2)}{2ar^2},$$

$$S_2S = -\frac{[(R^2 - a^2)^2 - 4a^2r^2]\,[(R^2 - a^2)^2 - 4r^2R^2]}{8ar^2(R^2 - a^2)^2} \qquad 58),$$

$$S_2S^* = S_2S + SS^*$$

$$= \frac{3(R^2 - a^2)^4 - 4r^2(a^2 + R^2)(R^2 - a^2)^2 - 16a^2r^4R^2}{8ar^2(R^2 - a^2)^2}.$$

Nach 69) ist:

$$S_2^*S^* = \frac{[(R^2 - a^2)^2 - 4a^2r^2]\,[(R^2 - a^2)^2 - 4r^2R^2]}{2ar^2\,[(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)]^2}.$$

Nun soll $S_2 \equiv S_2^*$, also

$$S_2S^* = S_2^*S^* \qquad \text{sein.}$$

$$3(R^2-a^2)^8-4r^2(R^2+a^2)(R^2-a^2)^6-16a^2r^4R^2(R^2-a^2)^4$$
$$-12r^2(R^2-a^2)^6(R^2+a^2)+16r^4(R^2-a^2)^4(R^2+a^2)^2$$
$$+64a^2r^6R^2(R^2-a^2)^2(R^2+a^2)+12r^4(R^2-a^2)^4(R^2+a^2)^2$$
$$-16r^6(R^2-a^2)^2(R^2+a^2)^3-64a^2r^8R^2(R^2+a^2)^2$$
$$=4(R^2-a^2)^8-16r^2(R^2-a^2)^6(R^2+a^2)+64a^2r^4R^2(R^2-a^2)^4$$
$$-8r^2(R^2-a^2)^6(R^2+a^2)+32r^4(R^2-a^2)^4(R^2+a^2)^2$$
$$-128a^2r^6R^2(R^2+a^2)(R^2-a^2)^2+4r^4(R^2-a^2)^6$$
$$-16r^6(R^2-a^2)^4(R^2+a^2)+64a^2r^8R^2(R^2-a^2)^2.$$

$$\underline{(R^2-a^2)^8-8r^2(R^2-a^2)^6(R^2+a^2)+8r^4(R^2-a^2)^4(10a^2R^2+a^4+R^4)}$$
$$\underline{-128a^2r^6R^2(R^2-a^2)^2(R^2+a^2)+128a^2r^8R^2(R^4+a^4)=0.}$$

Diese Bedingungsgleichung für Ponceletsche Achtecke zweiter Art weicht von der Steinerschen Achtecksformel ab. Sie stimmt mit der von Jacobi rational gemachten Gleichung von Fuss überein. (vgl. Einleitung.)

II. Verallgemeinerung der angewandten Methode und der erhaltenen Kennzeichen.

Beziehungen zwischen Punkten der Centrale zweier Kreise.

§ 14. Geht von jedem der beiden unendlich fernen Schnittpunkte der beiden Kreise K^2 und C_2 aus je ein dem K^2 eingeschriebener Zug von Tangenten an C_2, so verlaufen die beiden Züge symmetrisch zur Centrale MN. Sie mögen (u_1) und (u_2) heissen. Die $n$te Tangente von (u_1) schneide die $n$te Tangente von (u_2) auf der Centrale in P_n. Die Verbindungslinie der zweiten Schnittpunkte der beiden $n$ten Tangenten mit K^2 heisse s_n. s_n schneide MN in S_n. S_n' sei der Pol von s_n in bezug auf C_2. S_n' liegt auch auf MN. P_{n-1} und P_n sind zwei Gegenecken des dem C_2 umgeschriebenen

Vierseits, dessen Seiten die von P_{n-1} und P_n an C_2 gelegten Tangenten sind. S_{n-1} und S_{n-1}' sind die zwei auf MN liegenden Diagonalpunkte dieses Vierseits. Daher ist

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} (S_{n-1}\, S_{n-1}'\, C\, D) &= -1, \\ (S_{n-1}\, S_{n-1}'\, P_{n-1} P_n) &= -1. \end{aligned}$$

Eine eingehendere Begründung wäre analog derjenigen für spezielle Werte von n im Teil I.

s_{n-1} und s_n schneiden K^2 in den Ecken eines dem K^2 eingeschriebenen Vierecks, für welches P_n ein Diagonalpunkt ist. P_n' sei der zweite auf MN liegende Diagonalpunkt. Dann ist

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} (A\, B\, P_n\, P_n') &= -1, \\ (S_{n-1}\, S_n\, P_n\, P_n') &= -1. \end{aligned}$$

(a) und (b) sind Rekursionsformeln, durch welche die Lage von P_n, bezw. S_n auf MN bestimmt wird, sobald diejenige von P_{n-1} und S_{n-1} schon bekannt ist. $S_0 \equiv Q_\infty$ ist der unendlich ferne Punkt von MN, $P_1 \equiv N$ der Mittelpunkt von C_2.

Betrachtet man die beiden ebenfalls zur Centrale symmetrischen dem K^2 eingeschriebenen Züge (e_1) und (e_2) von Tangenten an C_2, die von den beiden endlichen Schnittpunkten der Kreise ausgehen, so gelangt man in ganz analogischer Weise zu Punkten:

$$\begin{array}{llll} P_1^*, & P_2^*, & \cdots & P_n^* \cdots, \\ P_1^{*\prime}, & P_2^{*\prime}, & \cdots & P_n^{*\prime} \cdots, \\ S_0^* \equiv Q, & S_1^* \equiv S^*, & & S_n^* \cdots, \\ S_0^{*\prime}, & S_1^{*\prime} \equiv S^{*\prime}, & & S_n^{*\prime} \cdots, \end{array}$$

für welche die Rekursionsformeln:

$$\text{(a*)} \qquad \begin{aligned} (S_{n-1}^*\, S_{n-1}^{*\prime}\, C\, D) &= -1, \\ (S_{n-1}^*\, S_{n-1}^{*\prime}\, P_{n-1}^*\, P_n^*) &= -1 \end{aligned} \qquad \text{und}$$

$$(\mathfrak{b}^*) \qquad \begin{matrix} (A & B & P_n^* & P_n^{*\prime}) = -1, \\ (S_{n-1}^* & S_n^* & P_n^* & P_n^{*\prime}) = -1 \end{matrix}$$ gelten.

$S_0^* \equiv Q$ ist der Schnittpunkt der Potenzlinie der beiden Kreise mit der Centrale. P_1^* ist der auf MN liegende konjugierte Punkt von S_0^* in bezug auf C_2.

Von den Berührungspunkten des K^2 mit den gemeinsamen äusseren, bezw. inneren Tangenten der beiden Kreise gehe je ein dem K^2 eingeschriebener Zug von Tangenten an C_2. Die Züge heissen (a_1) und (a_2), bezw. (i_1) und (i_2). Die beiden $n$ten Tangenten von (a_1) und (a_2), bezw. von (i_1) und (i_2), schneiden einander auf der Centrale in Z_n, bezw. Z_n^*. Die Verbindungslinie ihrer zweiten Schnittpunkte mit K^2, w_n, bezw. w_n^*, schneide die Centrale in W_n, bezw. W_n^*. W_n', bezw. $W_n^{*\prime}$, sei der auf MN liegende konjugierte Punkt von W_n, bezw. W_n^*, in bezug auf C_2. W_n und W_n', bezw. W_n^* und $W_n^{*\prime}$ sind die zwei auf MN gelegenen Diagonalpunkte des vollständigen Vierseits, das von den von den Punkten (K^2, w_n), bezw. (K^2, w_n^*), an C_2 gelegten Tangenten gebildet wird. Demnach ist

$$(\mathfrak{c}) \qquad \begin{matrix} (W_n & W_n' & C & D) & = -1, \\ (W_n & W_n' & Z_n & Z_{n+1}) & = -1; \end{matrix}$$

$$(\mathfrak{c}^*) \qquad \begin{matrix} (W_n^* & W_n^{*\prime} & C & D) & = -1, \\ (W_n^* & W_n^{*\prime} & Z_n^* & Z_{n+1}^{*\prime}) & = -1. \end{matrix}$$

Ist Z_n', bezw. $Z_n^{*\prime}$, der auf MN liegende konjugierte Punkt von Z_n, bezw. Z_n^*, in bezug auf K^2, so sind Z_n und Z_n', bezw. Z_n^* und $Z_n^{*\prime}$, zwei Diagonalpunkte des dem K^2 eingeschriebenen Vierecks, dessen Ecken die Schnittpunkte von K^2 mit w_n und w_{n-1}, bezw. mit w_n^* und w_{n-1}^* sind.

Daraus ergibt sich:

$$(\mathfrak{d}) \qquad \begin{matrix} (A & B & Z_n & Z_n') & = -1, \\ (W_n & W_{n-1} & Z_n & Z_n') & = -1; \end{matrix}$$

$$(\mathfrak{d}^*) \qquad \begin{matrix} (A & B & Z_n^* & Z_n^{*\prime}) & = -1, \\ (W_n^* & W_{n-1}^* & Z_n^* & Z_n^{*\prime}) & = -1. \end{matrix}$$

(c), (c*), (b) und (b*) sind Rekursionsformeln, mit deren Hilfe die Lage der Punkte Z_n, $Z_n{}^*$, W_n und $W_n{}^*$ festgelegt ist, sobald die von Z_{n-1}, $Z_{n-1}{}^*$, W_{n-1} und $W_{n-1}{}^*$ bekannt ist. Es sind nun $Z_0 \equiv \mathfrak{A}$ und $Z_0{}^* \equiv \mathfrak{A}^*$ der äussere und der innere Aehnlichkeitspunkt von K^2 und C^2, $W_0 \equiv T$ und $W_0{}^* \equiv T^*$ ihre auf MN liegenden konjugierten Punkte in bezug auf K^2.

Auf Grund der „Cayleyschen Kennzeichen" gewonnene Bedingungen für die gegenseitige Lage der betrachteten Punkte, damit den Kreisen Ponceletsche n-Ecke ein- bezw. umgeschrieben werden können.

§ 15. Auf Grund der „Cayleyschen Kennzeichen" werden nun Bedingungen für die gegenseitige Lage der in § 14 betrachteten Punkte abgeleitet werden, damit dem K^2 und C_2 Ponceletsche Ecke ein- bezw. umgeschrieben werden können.

Zunächst sei n gerade.

a) Erster Hauptfall.

$n = 4\,m$

1). Dem ersten Cayleyschen Kennzeichen zufolge muss zwischen zwei von den vier Schnittpunkten K^2 C_2 ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n}{2} = 2\,m$ Tangenten an C_2 möglich sein.

Sind die zwei betreffenden Schnittpunkte gleichartig, so muss die $m$te Tangente des Zuges (u_1), bezw. (e_1) die $m$te Tangente von (u_2), bezw. (e_2) auf K^2 schneiden; d. h. es ist

$\alpha)$ $P_m \equiv A$ oder B, bezw.

$\alpha^*)$ $P_m{}^* \equiv A$ oder B.

Nimmt man zwei ungleichartige Schnittpunkte an, so muss der zweite Schnittpunkt von K^2 mit der $m$ten Tangente eines Zuges (u) mit dem zweiten Schnittpunkt von K^2 mit der $m$ten Tangente eines Zuges (e) zusammenfallen. Dann ist

$\beta)$ $S_m \equiv S_m{}^*$.

Und umgekehrt: aus $S_m \equiv S_m^*$ folgt, dass $s_m \equiv s_m^*$ ist. Dann sind die Punkte (K^2, s_m) mit den Punkten (K^2, s_m^*) identisch, d. h. der zweite Schnittpunkt von K^2 mit der $m$ten Tangente eines Zuges (u) fällt mit dem zweiten Schnittpunkt von K^2 mit der $m$ten Tangente eines Zuges (e) zusammen. Zwischen zwei ungleichartigen Schnittpunkten der beiden Kreise gibt es also einen dem K^2 eingeschriebenen Zug von 2 m Tangenten an C_2, und das ist die erste Cayleysche Bedingung für Ponceletsche 4 m Ecke zweiter Art.

Analog kann man sich in allen übrigen Fällen die Umkehrung klar machen.

2) Das zweite Cayleysche Kennzeichen besagt, dass zwischen zwei Berührungspunkten des K^2 mit gemeinsamen Tangenten ein Zug von $\frac{n}{2} - 1 = 2m - 1$ Tangenten an C_2 laufen muss.

Verbindet der Zug die Berührungspunkte der beiden äusseren, bezw. die der beiden inneren gemeinsamen Tangenten, so ist w_{m-1}, bezw. w_{m-1}^* eine Tangente an C_2; mithin gilt:

$$\alpha) \quad W_{m-1} \equiv C \text{ oder } D,$$
$$\alpha^*) \quad W_{m-1}^* \equiv C \text{ oder } D.$$

Gehen die $2m-1$ Tangenten jedoch vom Berührungspunkt einer äusseren zu dem einer inneren gemeinsamen Tangente, so ist die $m$te Tangente eines Zuges (a) identisch mit der $m$ten Tangente eines Zuges (i), also auch

$$\beta) \quad Z_m \equiv Z_m^*.$$

b) Zweiter Hauptfall.

$$n = 4m + 2.$$

1) Nach dem ersten Cayleyschen Kennzeichen muss zwischen zwei Schnittpunkten der Kreise ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n}{2} = 2m + 1$ Tangenten an C_2 laufen.

Sind die Schnittpunkte gleichartig, so ist s_m bezw. s_m^* Tangente an C_2, d. h.

$$\alpha) \quad S_m \equiv C \text{ oder } D, \quad \text{bezw.}$$
$$\alpha^*) \quad S_m^* \equiv C \text{ oder } D.$$

Sind die betreffenden Schnittpunkte ungleichartig, so gilt, da dann die $(m+1)$te Tangente eines Zuges (u) mit der $(m+1)$ten Tangente eines Zuges (e) identisch sein muss, :

$$\beta) \quad P_{m+1} \equiv P_{m+1}^*.$$

2) Nach dem zweiten Cayleyschen Kennzeichen gibt es zwischen zwei Berührungspunkten des K^2 mit gemeinsamen Tangenten einen Zug von $\frac{n}{2} - 1 = 2\,m$ Tangenten an C_2, der dem K^2 eingeschrieben ist.

Werden die Berührungspunkte zweier äusseren, bezw. inneren gemeinsamen Tangenten verbunden, so schneiden sich die $m$ten Tangenten der Züge (a_1) und (a_2), bezw. (i_1) und (i_2) auf K^2. Folglich ist

$$\alpha) \quad Z_m \equiv A \text{ oder } B, \quad \text{bezw.}$$
$$\alpha^*) \quad Z_m^* \equiv A \text{ oder } B.$$

Liegen dagegen die betreffenden Berührungspunkte auf ungleichartigen gemeinsamen Tangenten, so fallen die zweiten Schnittpunkte des K^2 mit den $m$ten Tangenten eines Zuges (a) und eines Zuges (i) zusammen. Dann ist

$$\beta) \quad W_m \equiv W_m^*.$$

Nun sei n ungerade.

c) Dritter Hauptfall.

$$n = 4\,m + 1.$$

Nach dem Cayleyschen Kennzeichen für Polygone mit ungerader Seitenzahl geht ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n-1}{2} = 2\,m$ Tangenten an C_2, der einen Schnittpunkt der beiden Kreise mit dem Berührungspunkt des K^2

mit einer gemeinsamen Tangente verbindet, d. h. die $m$te Tangente eines der Züge (u_1), (u_2), (e_1) und (e_2) und die $m$te Tangente eines der Züge (a_1), (a_2), (i_1) und (i_2) schneiden je den K^2 zum zweiten Male in ein und demselben Punkte. Je nach der Zuordnung ist dann:

$$\begin{aligned} &\alpha) \quad S_m \equiv W_m, \\ &\alpha^*) \quad S_m{}^* \equiv W_m{}^*, \\ &\beta) \quad S_m \equiv W_m{}^*, \\ &\beta^*) \quad S_m{}^* \equiv W_m. \end{aligned}$$

d) Vierter Hauptfall.

$n = 4\,m + 3.$

Nach Cayley geht für $n = 4\,m + 3$ ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $\frac{n-1}{2} = 2\,m + 1$ Tangenten des C_2 von einem Schnittpunkte $K^2 C_2$ zu dem Berührungspunkte des K^2 mit einer gemeinsamen Tangente. Dann schneiden die $(m + 1)$te Tangente eines der Züge (u_1), (u_2), (e_1) und (e_2) und die $m$te Tangente eines der Züge (a_1), (a_2), (i_1) und (i_2) den K^2 je zum zweiten Male in ein und demselben Punkte. Je nach der Zuordnung folgt daraus:

$$\begin{aligned} &\alpha) \quad S_{m+1} \equiv W_m, \\ &\alpha^*) \quad S_{m+1}{}^* \equiv W_m{}^*, \\ &\beta) \quad S_{m+1} \equiv W_m{}^*, \\ &\beta^*) \quad S_{m+1}{}^* \equiv W_m. \end{aligned}$$

Untersuchung der Abhängigkeit der gewonnenen Bedingungen von einander und die sich dabei ergebende Unterscheidung von Polygonen erster und zweiter Art

§ 16. Im folgenden soll untersucht werden, welche der in § 15 abgeleiteten Beziehungen a) 1α bis d) β^* einander bedingen, bezw. welche von ihnen wirklich verschiedene Fälle bezeichnen. Es wird sich dabei herausstellen, dass die in § 15 gewonnenen Kennzeichen für Poncelet'sche n-Ecke bei beliebigem n in zwei Gruppen zerfallen derart,

dass die in einer Gruppe stehenden Bedingungen aus einander hervorgehen. So werden wir — auch bei ungerader Seitenzahl — zu der Unterscheidung von Polygonen erster und zweiter Art geführt, die bei gerader Seitenzahl schon von Herrn Prof. Sturm hervorgehoben worden ist. (Einleitung, § 2). Dass das zweite Cayleysche Kennzeichen zu denselben Resultaten führen muss wie das erste, besagt schon der in § 2, IIb zitierte Satz aus der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften von Sturm. In betreff der Zuordnung wird sich nun zeigen, dass Tangentenzüge zwischen gleichartigen, bezw. ungleichartigen Schnittpunkten der Kreise und solche zwischen Berührungspunkten des K^2 mit gleichartigen bezw. ungleichartigen gemeinsamen Tangenten zusammengehören, was bisher von Fall zu Fall durch Rechnung festgestellt werden musste.

Unserem Zwecke dienen drei auf MN liegende Involutionen, die wir jetzt betrachten wollen. Mache ich $Q \equiv S^*$ zum Centrum eines Kreises P_1, für den das Quadrat des Radius gleich der gemeinsamen Potenz von Q in bezug auf K^2 und C_2 ist, und wende ich mit P_1 als Basis die Transformation durch reziproke Radien an, so entsteht auf MN eine Involution J_1. A geht durch sie in B, C in D über. Dem Centrum $S_0{}^*$ von P_1 entspricht der unendlich ferne Punkt S_0. Dem Mittelpunkt eines der Kreise K^2 und C_2 entspricht bei einer solchen Transformation stets der dem Transformationszentrum in bezug auf den andern Kreis konjugierte Punkt auf der Centrale, also geht $N \equiv P_1$ in $P \equiv P_1{}^*$ über.

Die zweite Involution J_2 entsteht auch durch eine Transformation durch reziproke Radien, und zwar sei der äussere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ von K^2 und C_2 das Inversionszentrum, und das Quadrat des Radius des Inversionskreises P_2 sei gleich der gemeinsamen äusseren Potenz[1]) von K^2

---

[1]) d. i. gleich dem konstanten Produkt $\mathfrak{A}X . \mathfrak{A}Y$, wenn X, Y in bezug auf $\mathfrak{A}$ Potenz haltend sind, d. h. so auf den Kreisen in gerader Linie mit $\mathfrak{A}$ liegen, dass die Radien von X und Y nicht

und C_2. Paare von J_2 sind daher die inversen Punkte A und D, B und C. Dem Centrum $\mathfrak{A}$ entspricht der unendlich ferne S_0 und dem Mittelpunkt $N \equiv P_1$ von C_2 nach dem obigen Satze der dem $\mathfrak{A}$ in bezug auf K^2 konjugierte W_0.

Analog gelangen wir zu der Involution J_3. Das Centrum des Inversionskreises P_3 sei der innere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}^*$, das Quadrat des Radius von P_3 die analog definierte innere gemeinsame Potenz von K^2 und C_2. Es gehen sodann A und B bezw. in C und D, $\mathfrak{A}^*$ in den unendlich fernen S_0 und $N \equiv P_1$ in $W_0{}^*$ über.

Wir erhalten also zunächst:

$$(J_1): \quad \begin{bmatrix} A & C & S_0{}^* & P_1{}^* \\ B & D & S_0 & P_1 \end{bmatrix},$$

$$(J_2): \quad \begin{bmatrix} A & B & \mathfrak{A} \equiv Z_0 & P_1 \\ D & C & S_0 & W_0 \end{bmatrix},$$

$$(J_3): \quad \begin{bmatrix} A & B & \mathfrak{A}^* \equiv Z_0{}^* & P_1 \\ C & D & S_0 & W_0{}^* \end{bmatrix}.$$

Aus den ersten beiden Paaren einer jeden Involution ersieht man, dass je zwei der drei Involutionen sich stützen, d. h. ist X ein Punkt von MN, X' der ihm in J_α gepaarte und X'' der dem X' in J_β zugeordnete, so ist X'' dem X in J_γ gepaart, wenn $\alpha\ \beta\ \gamma$ eine Permutation von 1 2 3 ist[1]). Demnach vervollständigt sich das obige Schema zu:

$$(J_1): \quad \begin{bmatrix} A & C & S_0{}^* & P_1 & W_0 & Z_0 \\ B & D & S_0 & P_1{}^* & W_0{}^* & Z_0{}^* \end{bmatrix},$$

$$(J_2): \quad \begin{bmatrix} A & B & P_1 & Z_0 & P_1{}^* & Z_0{}^* \\ D & C & W_0 & S_0 & W_0{}^* & S_0{}^* \end{bmatrix},$$

$$(J_3): \quad \begin{bmatrix} A & B & Z_0{}^* & P_1 & P_1{}^* & Z_0 \\ C & D & S_0 & W_0{}^* & W_0 & S_0{}^* \end{bmatrix}.$$

---

parallel sind oder ihre Tangenten auf der Potenzlinie sich schneiden. (Steiner, Ges. W. Bd. I. S. 32, 33, 497 ff. oder Klassiker der exakt. Wiss. No. 123, S. 21—23.)

[1]) Sturm: Geometrische Verwandtschaften, Bd. I, No. 85.

Wenn S_{n-1} und $S_{n-1}{}^*$, P_n und $P_n{}^*$ in (J_1) gepaart sind, so sind es auch S_n und $S_n{}^*$, P_{n+1} und $P_{n+1}{}^*$. Zum Beweise dieses Satzes schreibe ich die Voraussetzung, dass S_{n-1} und $S_{n-1}{}^*$, sowie P_n und $P_n{}^*$ Paare von (J_1) sind, in der Form:

$\Pi_1)$ $\quad ABCDS_{n-1}P_n \overline{\wedge} BADCS_{n-1}{}^*P_n{}^*.$

Auf Grund von § 14, (b) und (b*) ist

$\Pi_2)$ $\quad \begin{matrix} A & B & P_n & P_n{}' \overline{\wedge} B & A & P_n{}^* & P_n{}^{*\prime} \text{ und} \\ S_{n-1} & S_n & P_n & P_n{}' \overline{\wedge} S_{n-1}{}^* & S_n{}^* & P_n{}^* & P_n{}^{*\prime}, \text{ und} \end{matrix}$

aus § 14, (a) und (a*) folgt

$\Pi_3)$ $\quad \begin{matrix} S_n & S_n{}' & C & D & \overline{\wedge} S_n{}^* & S_n{}^{*\prime} & D & C & \text{und} \\ S_n & S_n{}' & P_n & P_{n+1} \overline{\wedge} S_n{}^* & S_n{}^{*\prime} & P_n{}^* & P_{n+1}{}^*. \end{matrix}$

Π_1, Π_2 und Π_3 zusammen ergeben

$$ABCDS_{n-1}P_nP_n{}'S_nS_n{}'P_{n+1}\overline{\wedge}BADCS_{n-1}{}^*P_n{}^*P_n{}^{*\prime}S_n{}^*S_n{}^{*\prime}P_{n+1}{}^*,$$

woraus die obige Behauptung folgt. Da nun S_0 und $S_0{}^*$, sowie P_1 und $P_1{}^*$ schon als Paare von (J_1) erkannt sind, ist somit gezeigt, dass für jeden Wert von n S_n und $S_n{}^*$, P_n und $P_n{}^*$ in (J_1) gepaart sind.

Durch die eben angewandte Schlussweise erhält man mit Benutzung von § 14, (c), (c*), (b) und (b*), dass für jedes n Z_n und $Z_n{}^*$, W_n und $W_n{}^*$ auch Paare der Involution (J_1) sind.

Ebenso führt die Methode der vollkommenen Induktion zu dem Resultate, dass für jeden Wert von n W_{n-1} und P_n, Z_n und S_n, $W_{n-1}{}^*$ und $P_n{}^*$, $Z_n{}^*$ und $S_n{}^*$ in (J_2) gepaart sind.

Nehmen wir nämlich an, dass S_{n-1} und Z_{n-1}, sowie W_{n-1} und P_n Paare von (J_2) sind, so gilt:

$\Pi^1)$ $\quad ABCDS_{n-1}P_n \overline{\wedge} DCBAZ_{n-1}W_{n-1}.$

Nun folgt aus § 14, (b) und (c):

$\Pi^2)$ $\quad \begin{matrix} A & B & P_n & P_n{}' \overline{\wedge} D & C & W_{n-1} & W_{n-1}{}' \text{ und} \\ S_{n-1} & S_n & P_n & P_n{}' \overline{\wedge} Z_{n-1} & Z_n & W_{n-1} & W_{n-1}{}'; \end{matrix}$

aus § 14, (a) und (b) ergibt sich:

$$\Pi^3) \quad \begin{matrix} S_n & S_n' & C & D & \overline{\wedge} & Z_n & Z_n' & B & A, \\ S_n & S_n' & P_n & P_{n+1} & \overline{\wedge} & Z_n & Z_n' & W_{n-1} & W_n. \end{matrix}$$

Π^1), Π^2) und Π^3) zusammen ergeben:

$$ABCDS_{n-1}P_nP_n'S_nS_n'P_{n+1}\overline{\wedge}DCBAZ_{n-1}W_{n-1}W_{n-1}'Z_nZ_n'W_n,$$

d. h. S_n und Z_n, sowie $P_n + 1$ und W_n sind Paare von (J_2). Analog findet man mit Hilfe von (b*) und (c*) und von (a*) und (b*), dass $S_n{}^*$, $Z_n{}^*$ und $P_n + 1^*$, $W_n{}^*$ in (J_2) gepaart sind, wenn man es von $S_{n-1}{}^*$, $Z_{n-1}{}^*$ und $P_n{}^*$, $W_{n-1}{}^*$ voraussetzt. Wir fanden bereits, dass S_0, Z_0; $S_0{}^*$, $Z_0{}^*$; P_1, W_0; $P_1{}^*$ $W_0{}^*$ Paare von (J_2) sind; mithin sind für einen beliebigen Wert von n

$$S_n, Z_n; \quad S_n{}^*, Z_n{}^*; \quad P_n + 1, W_n; \quad P_n + 1^*, W_n{}^*$$ in (J_2) einander zugeordnet.

Da (J_1), (J_2) und (J_3) sich zu je zweien stützen, folgt, dass

$$Z_n{}^*, S_n; \quad P_n, W_{n-1}{}^*; \quad P_n{}^*, W_{n-1}; \quad Z_n, S_n{}^*$$

Paare von (J_3) sind.

Die drei Involutionen sind also:

$$(J_1) \quad \begin{bmatrix} A & C & S_n & \cdots P_n & \cdots\cdots & W_n & \cdots Z_n & \cdots \\ B & D & S_n{}^* \cdots P_n{}^* \cdots\cdots & W_n{}^* \cdots & Z_n{}^* & \cdots \end{bmatrix},$$

$$(J_2) \quad \begin{bmatrix} A & B & S_n & \cdots P_n & \cdots\cdots & S_n{}^* & \cdots P_n{}^* & \cdots \\ D & C & Z_n & \cdots W_{n-1} & \cdots Z_n{}^* & \cdots & W_{n-1}{}^* & \cdot \end{bmatrix},$$

$$(J_3) \quad \begin{bmatrix} A & B & S_n & \cdots P_n & \cdots\cdots & S_n{}^* & \cdots P_n{}^* & \cdots \\ C & D & Z_n{}^* \cdots & W_{n-1}{}^* \cdots & Z_n & \cdots & W_{n-1} & \cdot \end{bmatrix}.$$

Wenn in zwei involutorischen Punktreihen — die parabolische Involution ist ausgeschlossen — zwei Punkte aufeinander fallen, so gilt das auch für die ihnen in der Involution gepaarten Punkte.

Aus $P_m \equiv A$ bezw. B folgt also
$P_m^* \equiv B$ bezw. A, (J_1)
$W_{m-1} \equiv D$ bezw. C, (J_2)
$W_{m-1}^* \equiv C$ bezw. D, (J_3).
[$4m$-Ecke erster Art].

Aus $S_m \equiv S_m^*$ ergibt sich
$Z_m \equiv Z_m^*$ [nach (J_2) oder (J_3)].
[$4m$-Ecke zweiter Art].

Aus $S_m \equiv C$ bezw. D folgt
$S_m^* \equiv D$ bezw. C, (J_1)
$Z_m \equiv B$ bezw. A, (J_2)
$Z_m^* \equiv A$ bezw. B, (J_3).
[$(4m+2)$-Ecke erster Art].

Ist $P_{m+1} \equiv P_{m+1}^*$, so ist auch
$W_m \equiv W_m^*$ [nach (J_2) oder (J_3)].
[$(4m+2)$-Ecke zweiter Art].

Wenn $S_m \equiv W_m$ ist, so ist auch
$S_m^* \equiv W_m^*$, (J_1)
$Z_m \equiv P_{m+1}$, (J_2)
$Z_m^* \equiv P_{m+1}^*$, (J_3).
[$(4m+1)$-Ecke erster Art].

Aus $S_m \equiv W_m^*$ folgt
$S_m^* \equiv W_m$, (J_1)
$Z_m \equiv P_{m+1}^*$, (J_2)
$Z_m^* \equiv P_{m+1}$, (J_3).
[$(4m+1)$-Ecke zweiter Art].

Aus $P_{m+1} \equiv Z_{m+1}$ ergibt sich
$P_{m+1}^* \equiv Z_{m+1}^*$, (J_1)
$W_m \equiv S_{m+1}$, (J_2)
$W_m^* \equiv S_{m+1}^*$, (J_3).
[$(4m+3)$-Ecke erster Art].

$$P_{m+1} \equiv Z_{m+1}^* \quad \text{bedingt}$$
$$P_{m+1}^* \equiv Z_{m+1}, \quad (J_1)$$
$$W_m \equiv S_{m+1}^*, \quad (J_2)$$
$$W_m^* \equiv S_{m+1}, \quad (J_3).$$

[$(4m+3)$-Ecke zweiter Art].

Die Kennzeichen für $4m+1$-Ecke:

$$Z_m \equiv P_{m+1}, \qquad Z_m \equiv P_{m+1}^*,$$
$$Z_m^* \equiv P_{m+1}^*, \qquad Z_m^* \equiv P_{m+1},$$

die jetzt zu den früher gewonnenen hinzukamen, hätten sich auch schon in § 15c herausgestellt, wenn wir dort in Betracht gezogen hätten, dass die $m$te Tangente eines der Züge (a_1), (a_2), (i_1) und (i_2) und die $m+1$te Tangente eines der Züge (u_1), (u_2), (e_1) und (e_2), also auch ihre Schnittpunkte mit MN identisch sind.

Analoges gilt für die $4m+3$-Ecke.

§ 17. Einige Angaben über die gegenseitige Lage der beiden Kreise.

Hilfssätze.

1.

Alle Punkte P_i liegen innerhalb C_2.

§ 14, (a): $(S_{n-1}\, S_{n-1}'\, C \quad D) = -1$ und
$(S_{n-1}\, S_{n-1}'\, P_{n-1}\, P_n) = -1$ lehren, dass

C und D und zwei aufeinanderfolgende Punkte P_{n-1} und P_n zwei Paare der hyperbolischen Involution bilden, deren Doppelelemente S_{n-1} und S_{n-1}' sind. C, D und P_{n-1}, P_n müssen also hyperbolische Lage haben. Wenn P_{n-1} zwischen C und D liegt, muss auch P_n innerhalb C_2 liegen. Nun ist $P_1 \equiv N$ der Mittelpunkt von C_2. Alle P_i liegen mithin innerhalb C_2.

2.

Keiner der Punkte S_m liegt innerhalb K^2.

Aus § 14, (b): $(A \quad B \quad P_n \quad P_n') = -1$
und $(S_{n-1}\, S_n \quad P_n \quad P_n') = -1$, folgt,

dass A, B und S_{n-1}, S_n zu einander hyperbolische Lage haben. Sobald einer der Punkte S_{n-1} und S_n auf der Strecke $A \cdot B$ liegt, gilt das auch für den andern. Ferner muss, wenn $S_{n-1} \equiv A$ oder B ist, $S_n \equiv B$, bezw. A sein. Nun ist I, 8) $MS_1 = \frac{a^2 + R^2}{2a} = R \cdot \frac{a^2 + R^2}{2aR} \geqq R$. Ist $MS_1 > R$, so liegen sämtliche S_m ausserhalb K^2. Dagegen liegen alle S_m auf K^2, wenn $MS_1 = R$ ist. Letzteres ist der Fall, wenn $R = a$ ist, also N auf K^2 liegt.

3.

§ 14, (c): $(W_n \; W_n' \; C \; D \quad) = -1$,
$(W_n \; W_n' \; Z_n \; Z_{n+1}) = -1$ und

(c*): $(W_n^* \, W_n^{*\prime} \, C \; D \quad) = -1$,
$(W_n^* \, W_n^{*\prime} \, Z_n^* \, Z_{n+1}^*) = -1$ zeigen,

dass alle Z_m, bezw. Z_m^* gleichzeitig innerhalb, ausserhalb oder auf C_2 liegen.

4.

Ebenso folgt aus

§ 14, (b): $(A \; B \quad Z_n \; Z_n') = -1$,
$(W_n \; W_{n-1} \; Z_n \; Z_n') = -1$ und

(b*): $(A \; B \quad Z_n^* \; Z_n^{*\prime}) = -1$,
$(W_n^* \; W_{n-1}^* \; Z_n^* \; Z_n^{*\prime}) = -1$,

dass alle Punkte W_m, bezw. W_m^* gleichzeitig auf, innerhalb oder ausserhalb K^2 liegen müssen.

Für $4m$-Ecke erster Art ist

$$P_m \equiv A \text{ oder } B.$$

Nach dem ersten Hilfssatz müssen sich dann K^2 und C_2 schneiden; denn die andere Möglichkeit, dass K^2 ganz innerhalb C_2 liegt, ist auszuschliessen, wenn nicht alle dem K^2 ein- und dem C_2 umgeschriebenen Polygone imaginär sein sollen.

Für $4m$-Ecke zweiter Art ist

$$S_m \equiv S_m^*;$$

d. h. zwei reelle in (J_1) gepaarte Punkte fallen zusammen. Folglich muss (J_1) hyperbolisch sein. A, B und C, D haben dann hyperbolische Lage. K^2 und C_2 schneiden sich also nicht.

Für $2(2m+1)$-Ecke erster Art ist

$$S_m \equiv C \text{ oder } D.$$

S_m liegt auf K^2, wenn N auf K^2 liegt, wie im zweiten Hilfssatz gesagt wird. Dies ist, wenn $S_m \equiv C$ oder D sein soll, auszuschliessen, da sonst C_2 entweder in einen Punkt ausartet oder den K^2 einschliessend berührt, eine Lage, die für unser Problem nicht brauchbar ist. Nach dem zweiten Hilfssatz bleibt dann nur die Möglichkeit, dass S_m und folglich mindestens einer der Punkte C und D ausserhalb K^2 liegen, d. h. K^2 umschliesst C_2 nicht. Die Kreise liegen entweder nebeneinander oder sie schneiden sich, wenn sie Ponceletsche $2(2m+1)$-Ecke erster Art besitzen.

Für $2(2m+1)$-Ecke zweiter Art ist

$$P_{m+1} \equiv P_{m+1}^*.$$

Zwei in (J_1) gepaarte Punkte fallen zusammen. (J_1) ist hyperbolisch. A, B und C, D haben folglich hyperbolische Lage, und die Kreise schneiden sich mithin nicht.

$4m+1$-Ecke erster Art.

$$S_m \equiv W_m.$$

Nach dem zweiten und dem vierten Hilfssatz liegt, wenn $S_m \equiv W_m$ ist, $W_0 \equiv T$ entweder auf K^2 oder ausserhalb K^2, die Lage auf K^2 ist unbrauchbar, also: die in W_0 auf MN errichtete Senkrechte schneidet K^2 in zwei imaginären Punkten. Daraus folgt, dass K^2 und C_2 imaginäre gemeinsame äussere Tangenten haben. K^2 umschliesst also C_2.

$(4m + 1)$-Ecke zweiter Art.

Ist $S_m \equiv W_m^*$,

so folgt aus dem zweiten und dem vierten Hilfssatz, dass $W_0^* \equiv T^*$ auf K^2 oder ausserhalb K^2 liegen muss. Die Lage von W_0^* auf K^2 ist wiederum auszuschliessen. W_0^* liegt ausserhalb K^2, die inneren gemeinsamen Tangenten von K^2 und C_2 sind daher imaginär, und K^2 muss daher den C_2 entweder einschliessen oder reell schneiden.

$(4m + 3)$-Ecke erster Art.

Wenn $P_{m+1} \equiv Z_{m+1}$ ist, liegt nach dem ersten Hilfssatz Z_{m+1} innerhalb C_2 und nach dem dritten Hilfssatz dann auch $Z_0 \equiv \mathfrak{A}$ innerhalb C_2. Wenn der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise nicht ausserhalb beider Kreise liegt, so liegt ein Kreis im andern. Also K^2 umschliesst C_2.

$(4m + 3)$-Ecke zweiter Art.

Aus $P_{m+1} \equiv Z_{m+1}^*$ folgt analog nach dem ersten und dritten Hilfssatz, dass der innere Aehnlichkeitspunkt von K^2 und C_2, $Z_0^* \equiv \mathfrak{A}^*$, innerhalb C_2 liegt. Dann wird C_2 entweder von K^2 eingeschlossen oder reell geschnitten.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen lassen sich auch auf folgendem Wege herleiten:

$4m$-Ecke erster Art.

Die $m$te Tangente des Zuges (u_1) schneidet die $m$te Tangente von (u_2) auf K^2, [§ 15], und zwar infolge der Symmetrie der Züge in bezug auf die Centrale in einem Endpunkte des Durchmessers AB. Da die Züge (u_1) und (u_2) von den absoluten Punkten ausgehen, sind ihre $m$ten Tangenten imaginär; ihr Schnittpunkt liegt also innerhalb C_2. Es sei der Punkt B. K^2 und C_2 schneiden sich mithin, da der Fall, dass C_2 den K^2 umschliesst, für unser Problem nicht brauchbar ist. Die beiden $m$ten

Tangenten der reellen Züge (e_1) und (e_2) schneiden sich dann in dem ausserhalb C_2 gelegenen Punkte A.

Vom zweiten Cayleyschen Kennzeichen ausgehend, fanden wir, dass C_2 von der $m$ten Tangente des Zuges (a_1), die zugleich $m$te Tangente von (a_2) ist, auf der Centrale berührt wird. (§ 15). Bei sich schneidenden Kreisen sind (a_1) und (a_2) reell. Die $m$te Tangente eines Zuges (a) schneidet K^2 in reellen Punkten und berührt daher den C_2 in dem innerhalb K^2 gelegenen Punkte C. Die mittlere Tangente des zwischen den Berührungspunkten des K^2 mit den inneren gemeinsamen Tangenten laufenden Zuges dagegen berührt C_2 ausserhalb K^2 in D.

4 m-Ecke zweiter Art.

Zwischen zwei ungleichartigen Schnittpunkten K^2C_2 geht ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $2m$ Tangenten an C_2. Da dieser Zug einen der absoluten Punkte zum Ausgangspunkt hat, so sind die Schnittpunkte sämtlicher Tangenten mit K^2 imaginär. Nun geht der Zug auch durch einen endlichen Schnittpunkt K^2C_2. Dieser darf also nicht reell sein. Die Kreise schneiden sich mithin nicht. Ebenso müssen die Tangenten, welche die Berührungspunkte von ungleichartigen gemeinsamen Tangenten verbinden, entweder sämtlich reell oder sämtlich imaginär sein, wodurch ebenfalls der Fall, dass K^2 und C_2 sich schneiden, ausgeschlossen ist.

$(4m + 2)$-Ecke erster Art.

Ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $2m + 1$ Tangenten an C_2 verbindet die beiden absoluten Punkte. Die Schnittpunkte aller dieser Tangenten mit K^2 sind imaginär. Die Endpunkte der beiden $m$ten Tangenten der Züge (u_1) und (u_2) werden durch eine Tangente von C_2 verbunden, welche wegen der Symmetrie jener Endpunkte in bezug auf die Centrale zu dieser normal und reell ist. Da sie K^2 imaginär schneidet, muss der Durchmesserendpunkt von C_2,

in dem sie C_2 berührt, ausserhalb K^2 liegen. Der Fall, dass C_2 innerhalb K^2 liegt, ist daher ausgeschlossen.

Wenn K^2 und C_2 sich reell schneiden und C innerhalb, D ausserhalb K^2 liegt, so laufen die Tangentenzüge, die von den absoluten Punkten ausgehen, nach den imaginären Schnitten der Tangente von D mit K^2, die reellen, die von den reellen Schnitten ausgehen, nach denen der in C an C_2 gelegten Tangente.

Betrachten wir das zweite Cayleysche Kennzeichen, so haben wir von gleichartigen Berührungspunkten gemeinsamer Tangenten auf K^2 ausgehende Tangentenzüge von je m Tangenten, die sich wegen der Symmetrie in A oder B schneiden. A liege ausserhalb C_2, B innerhalb. Wenn K^2 und C_2 sich schneiden, so sind die von den Berührungspunkten der äusseren gemeinsamen Tangenten ausgehenden Züge reell. Sie treffen sich in A. Die von den Berührungspunkten der inneren gemeinsamen Tangenten kommenden Züge sind imaginär und treffen sich in B.

Liegen die Kreise auseinander, so sind beim ersten Kennzeichen in beiden Fällen die Züge imaginär, und die Tangente in C oder D schneidet K^2 imaginär. Beim zweiten Kennzeichen sind die Tangentenzüge sämtlich reell und der Treffpunkt ist A oder B, welche ausserhalb C_2 liegen.

$(4m + 2)$-Ecke zweiter Art.

Ganz ebenso wie bei den $4m$-Ecken zweiter Art folgt auch hier, dass der Fall, dass K^2 und C_2 sich schneiden, ausgeschlossen ist. C_2 liegt entweder innerhalb oder ganz ausserhalb K^2.

$(4m + 1)$-Ecke erster und zweiter Art.

Zwischen einem Schnittpunkt K^2C_2 und einem Berührungspunkt des K^2 mit einer gemeinsamen Tangente läuft ein dem K^2 eingeschriebener Zug von $2m$ Tangenten an C_2. Die Tangenten der von den absoluten Punkten ausgehenden Züge schneiden K^2 imaginär. Je nachdem der

von einem absoluten Punkt ausgehende Zug von Tangenten nach dem Berührungspunkt des K^2 mit einer äusseren oder inneren gemeinsamen Tangente hinläuft, ist also notwendig, dass die äusseren oder inneren gemeinsamen Tangenten imaginär sind. Im ersteren Falle umschliesst K^2 den C_2, [$(4m+1)$-Ecke erster Art], im zweiten wird C_2 von K^2 entweder eingeschlossen oder geschnitten, [$(4m+1)$-Ecke zweiter Art].

$(4m+3)$-Ecke erster und zweiter Art.

Da bei $(4m+3)$-Ecken auch ein Schnittpunkt K^2C_2 mit dem Berührungspunkt von K^2 mit einer gemeinsamen Tangente durch einen dem K^2 eingeschriebenen Zug von Tangenten an C_2 verbunden wird, so gelten die eben gemachten Ueberlegungen auch hier. Also:

Bei $(4m+3)$-Ecken erster Art liegt C_2 innerhalb K^2.

Bei $(4m+3)$-Ecken zweiter Art wird C_2 von K^2 umschlossen oder geschnitten.

Aus dem Umstande, dass die Kreise für den Fall von $4m$-Ecken erster Art sich schneiden müssen und für Polygone von gerader Seitenzahl erster Art sich jedenfalls nicht umschliessen, ist vielleicht zu erklären, dass Jacobi die Formel für Vierecke erster Art nicht erhalten hat. Nahm er doch von vornherein an, dass K^2 den C_2 umschliesse. Ebenso setzt die Methode, die Fuss zur Abteilung seiner Formeln anwandte, voraus, dass ein Kreis im andern liege. Auch sie konnte daher nicht zu den Formeln für $2n$-Ecke erster Art führen. Da Steiner bei gerader Seitenzahl nur Formeln für Polygone zweiter Art gefunden hat, so ist zu vermuten, dass seine Methode von der in dieser Arbeit angewandten verschieden war.

Ableitung der Formel für Zehnecke erster Art mit Benutzung des Resultats von § 15b).

§ 18. Zum Schluss will ich noch für

Zehnecke erster Art

die algebraische Formel zwischen R, r und a ableiten. Ein Kennzeichen für Zehnecke erster Art ist nach § 15,b): $S_2 \equiv C$ oder D.

Daraus folgt:

$$S_2S_1 = CS_1 \text{ oder } DS_1.$$

Nun ist $MS_1 = \frac{a^2 + R^2}{2a}$ I, 8), also

$$CS_1 = \frac{a^2 + R^2}{2a} + r - a = \frac{R^2 - a^2 + 2ar}{2a},$$

$$DS_1 = \frac{a^2 + R^2}{2a} - r - a = \frac{R^2 - a^2 - 2ar}{2a},$$

$$S_1S_2 = \frac{[(R^2-a^2)^2 - 4a^2r^2][(R^2-a^2)^2 - 4r^2R^2]}{8ar^2(R^2-a^2)^2} \quad \text{I, 58).}$$

Ist nun $S_1S_2 = S_1C$, so erhält man

$$[(R^2-a^2)^2 - 4a^2r^2]\cdot[(R^2-a^2)^2 - 4r^2R^2] = 4r^2(R^2-a^2)^2(a^2-R^2-2ar),$$

$$\text{I.} \quad (R^2-a^2)^4 - 8a^2r^2(R^2-a^2)^2 + 16a^2r^4R^2 = -8ar^3(R^2-a^2)^2.$$

Aus $S_1S_2 = S_1D$ ergibt sich

$$[(R^2-a^2)^2 - 4a^2r^2][(R^2-a^2)^2 - 4r^2R^2] = 4r^2(R^2-a^2)^2(a^2-R^2+2ar),$$

$$\text{II.} \quad (R^2-a^2)^4 - 8a^2r^2(R^2-a^2)^2 + 16a^2r^4R^2 = 8ar^3(R^2-a^2)^2.$$

I und II zusammen führen zu

$$[(R^2-a^2)^4 - 8a^2r^2(R^2-a^2)^2 + 16a^2r^4R^2]^2 = 64a^2r^6(R^2-a^2)^4$$

als Bedingungsgleichung für Zehnecke erster Art.

Lebenslauf.

Ich, Frieda Goldmann, jüdischen Bekenntnisses, Tochter des Kaufmanns Leopold Goldmann und seiner Frau Auguste, geb. Goldmann, wurde am 31. Mai 1881 zu Hirschberg i./Schles. geboren. Ich besuchte dort die städtische höhere Mädchenschule und dann in Breslau die höhere Mädchenschule von Fräulein Margarete Joachimsthal, die ich Ostern 1897 verliess. Ich bestand Ostern 1900 die Prüfung für Lehrerinnen an mittleren und höheren Mädchenschulen und unterrichte seitdem an der Anstalt von Fräulein Höniger in Breslau. Ostern 1904 erhielt ich auf Grund einer Prüfung am Königl. Friedrichs-Gymnasium zu Breslau das Zeugnis der Reife. Seit Michaeli 1904 widme ich mich vorzugsweise dem Studium der Mathematik und Physik.

In dankbarer Gesinnung nenne ich die Namen der Herren Professoren und Dozenten, an deren Vorlesungen und Uebungen ich während meiner Studienzeit teilgenommen habe:

Abegg, Baumgartner, Freudenthal, Hintze, Hönigswald, Kneser, Kühnemann, Landsberg, Lummer, Pringsheim, Rosanes, Schaefer, Stern, Sturm.